Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées - Oujda

Cours d'Electrostatique
Filière STPI
Pr. Rachid MALEK

PLAN DU COURS

I- Le champ électrostatique

1. Notions générales
    a. Phénomènes électrostatiques
    b. Structure de la matière
    c. Les divers états de la matière
    d. Matériaux isolants et conducteurs
2. Force et champ électrostatiques
    a. La force de Coulomb
    b. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle
    c. Champ créé par un ensemble de charges
    d. Propriétés de symétrie du champ électrostatique

II- Lois fondamentales de l'électrostatique

1. Flux du champ électrostatique
    a. Notion d'angle solide
    b. Le Théorème de Gauss
    c. Exemples d'application
    d. Lignes de champ
2. Circulation du champ électrostatique
    a. Notion de potentiel électrostatique
    b. Potentiel créé par une charge ponctuelle
    c. Potentiel créé par un ensemble de charges
3. Le dipôle électrostatique
    a. Potentiel créé par deux charges électriques
    b. Champ électrostatique créé à grande distance
    c. Complément : développements multipolaires

III- Conducteurs en équilibre

1. Conducteurs isolés
    a. Notion d'équilibre électrostatique
    b. Quelques propriétés des conducteurs en équilibre
    c. Capacité d'un conducteur isolé
    d. Superposition d'états d'équilibre
2. Systèmes de conducteurs en équilibre
    a. Théorème des éléments correspondants
    b. Phénomène d'influence électrostatique
    c. Coefficients d'influence électrostatique
3. Le condensateur
    a. Condensation de l'électricité
    b. Capacités de quelques condensateurs simples
    c. Association de condensateurs

IV- Energie et actions électrostatiques

1. Energie potentielle électrostatique
    a. Energie électrostatique d'une charge ponctuelle
    b. Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles
    c. Energie électrostatique de conducteurs en équilibre
    d. Quelques exemples
2. Actions électrostatiques sur un conducteur en équilibre
    a. Notions de mécanique du solide
    b. Calcul direct des actions électrostatiques sur un conducteur chargé
    c. Calcul des actions électrostatiques à partir de l'énergie
    d. Exemple du condensateur
    e. Exemple du dipôle

Formulaire d'électrostatique

Champ électrostatique

Créé par une particule:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Créé par n charges ponctuelles:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}$$

Créé par une distribution continue:

$$\vec{E}(M) = \int \overrightarrow{dE}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

Distributions de charges :

linéique : $dq = \lambda\, dl$

surfacique : $dq = \sigma\, d^2S$

volumique : $dq = \rho\, d^3V$

Potentiel électrostatique

Créé par une charge ponctuelle

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Créé par n charges ponctuelles

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} + V_0$$

Créé par une distribution continue

$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} + V_0$$

Conducteurs en équilibre

Champ à proximité (Th de Coulomb) :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Capacité d'un conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{où} \quad Q = \iint_{\text{Surface}} \sigma\, d^2S$$

Coefficients d'influence (n conducteurs) :

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_j \quad \text{avec} \quad C_{ij} = C_{ji}$$

Capacité d'un condensateur

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{où} \quad U = V_1 - V_2$$

Propriétés fondamentales

Flux (Th. de Gauss) :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Circulation :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad \left(\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V\right)$$

Energie potentielle électrostatique

D'une charge ponctuelle :

$$W_e = qV$$

D'un conducteur isolé :

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

D'un système de n conducteurs :

$$W_e = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}Q_iV_i$$

Force électrostatique

Sur une particule chargée (Coulomb)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Sur un conducteur <u>en équilibre</u>

$$\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{d^2F} = \iint_S \sigma\overrightarrow{E_{ext}}\, d^2S = \iint_S P d^2S\vec{n}$$

Expression via l'énergie (condensateur)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, W_e\left(= \frac{U^2}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, C\right)$$

Dipôle électrostatique

Moment dipolaire électrique :

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Potentiel à grande distance :

$$V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u_\rho}}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^2}$$

Energie électrostatique

$$W_e = -\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}$$

Force et moment électrostatiques

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p}\wedge\overrightarrow{E_{ext}}$$

Chapitre I- Le champ électrostatique

I.1- Notions générales

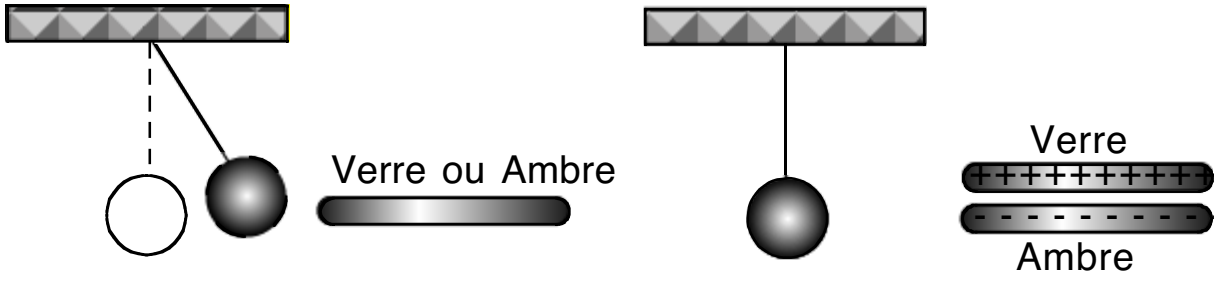
I.1.1- Phénomènes électrostatiques : notion de charge électrique

Quiconque a déjà vécu l'expérience désagréable d'une « décharge électrique » lors d'un contact avec un corps étranger connaît un effet électrostatique. Une autre manifestation de l'électricité statique consiste en l'attraction de petits corps légers (bouts de papier par ex.) avec des corps frottés (règles, pour continuer sur le même ex.). Ce type de phénomène est même rapporté par Thalès de Milet, aux alentours de 600 av. J.-C. : il avait observé l'attraction de brindilles de paille par de l'ambre jaune frotté… Le mot électricité, qu désigne l'ensemble de ces manifestations, provient de « elektron », qui signifie ambre en grec.

L'étude des phénomènes électriques s'est continuée jusqu'au XIXème siècle, où s'est élaborée la théorie unifiée des phénomènes électriques et magnétiques, appelée électromagnétisme. C'est à cette époque que le mot « statique » est apparu pour désigner les phénomènes faisant l'objet de ce cours. Nous verrons plus loin, lors du cours sur le champ magnétique, pourquoi il en est ainsi. On se contentera pour l'instant de prendre l'habitude de parler de phénomènes électrostatiques.

Pour les mettre en évidence et pour apporter une interprétation cohérente, regardons deux expériences simples.

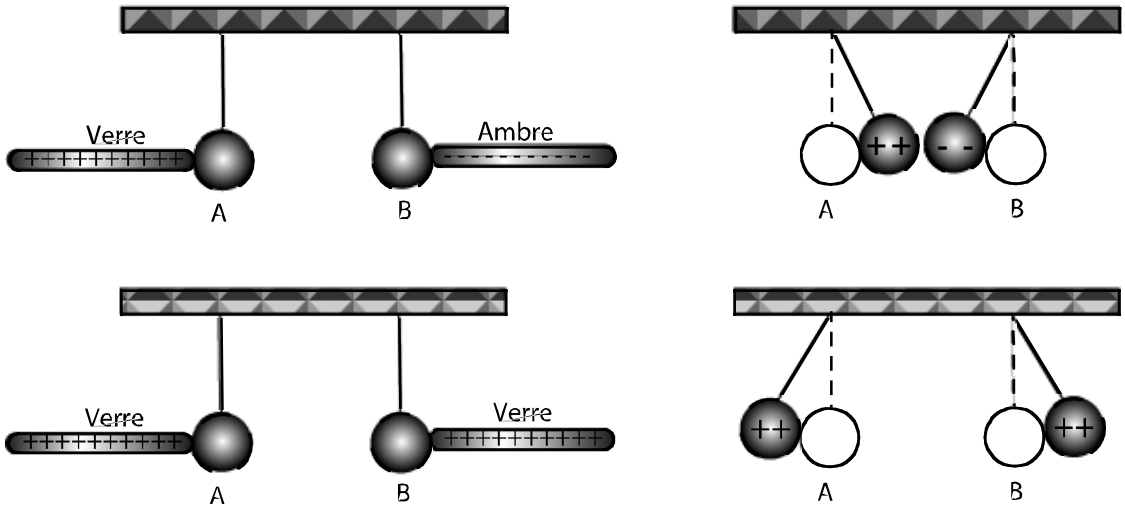
Expérience 1 :
Prenons une boule (faite de sureau ou de polystyrène, par ex.) et suspendons-la par un fil. Ensuite on approche une tige, de verre ou d'ambre, après l'avoir frottée préalablement : les deux tiges *attirent* la boule.
Par contre, si l'on approche simultanément les deux tiges côte à côte, rien ne se passe.



Tout se passe donc comme si chacune des tiges était, depuis son frottement, porteuse d'électricité, mais que celle-ci pouvait se manifester en deux états contraires (car capables d'annuler les effets de l'autre). On a ainsi qualifié arbitrairement de *positive* l'électricité contenue dans le verre (frotté avec de la soie), et de *négative* celle portée par l'ambre (idem, ou encore du plastique frotté avec de la fourrure).

Expérience 2 :

Prenons maintenant deux boules A et B, préalablement mises en contact avec une tige frottée (elles sont « électrisées »), et suspendons-les côte à côte. Si elles ont été mises en contact toutes deux avec une tige de même matériau, elles se *repoussent*.



Par contre, si elles ont été mises en contact avec des tiges de matériau différent (ex. A avec du verre frotté et B avec de l'ambre frotté), alors elles *s'attirent*. Si, du fait de leur attraction, elles viennent à se toucher, on observe qu'elles perdent alors toute électrisation : elles prennent une position d'équilibre vis-à-vis du leur poids.

Cette expérience est assez riche. On peut tout d'abord en conclure que deux corps portant une électricité de même nature (soit positive, soit négative) se repoussent, tandis qu'ils s'attirent s'ils portent des électricités contraires.

Mais cette expérience nous montre également que cette électricité est capable, non seulement d'agir à distance (répulsion ou attraction), mais également de se déplacer d'un corps à un autre. Mais alors qu'est-ce qui se déplace ?
Si l'on suspend les boules à une balance, même très précise, nous sommes incapables de détecter la moindre variation de poids entre le début de l'expérience et le moment où elles sont électrisées. Pourtant, le fait qu'il soit nécessaire qu'il y ait un contact entre deux matériaux pour que l'électricité puisse passer de l'un à l'autre, semble indiquer que cette électricité est portée par de la matière.

On explique l'ensemble des effets d'électricité statique par l'existence, au sein de la matière, de particules portant une **charge électrique** q, positive ou négative, et libres de se déplacer. C'est Robert A. Millikan qui a vérifié pour la première fois en 1909, grâce à une expérience mettant en jeu des gouttes d'huile, le fait que toute charge électrique Q est quantifiée, c'est à dire qu'elle existe seulement sous forme de multiples d'une charge élémentaire e, <u>indivisible</u> (Q=Ne). La particule portant cette charge élémentaire est appelée l'**électron**.

Dans le système d'unités international, l'unité de la charge électrique est le Coulomb (symbole C). Des phénomènes d'électricité statique mettent en jeu des nanocoulombs (nC) voire des microcoulombs (μC), tandis que l'on peut rencontrer des charges de l'ordre du Coulomb en électrocinétique.

L'ensemble des expériences de la physique (et en particulier celles décrites plus haut) ne peuvent s'expliquer que si la charge électrique élémentaire est un invariant : on ne peut ni la détruire ni l'engendrer, et ceci est valable quel que soit le référentiel. C'est ce que l'on décrit par la notion d'invariance relativiste de la charge électrique.

I.1.2- Structure de la matière

La vision moderne de la matière décrit celle-ci comme étant constituée d'atomes. Ceux-ci sont eux-mêmes constitués d'un noyau (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel « gravite » une sorte de nuage composé d'électrons et portant l'essentiel de la masse. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau car celui-ci possède une charge électrique positive qui les attire. On attribue cette charge positive à des particules appelées **protons**. Cependant, le noyau atomique ne pourrait rester stable s'il n'était composé que de protons : ceux-ci ont en effet tendance à se repousser mutuellement. Il existe donc une autre sorte de particules, les **neutrons** (découverts en 1932 par Chadwick) portant une charge électrique nulle. Les particules constituant le noyau atomique sont appelées les **nucléons**.

Dans le tableau de Mendeleev tout élément chimique X est représenté par la notation ${}^{A}_{Z}X$. Le nombre A est appelé le nombre de masse : c'est le nombre total de nucléons (protons et neutrons). Le nombre Z est appelé le nombre atomique et est le nombre total de protons constituant le noyau. La charge électrique nucléaire totale est donc Q=+Ze, le cortège électronique possédant alors une charge totale Q=-Ze, assurant ainsi la neutralité électrique d'un atome.
Exemple : le Carbone ${}^{12}_{6}C$ possède 12 nucléons, dont 6 protons (donc 6 électrons) et 6 neutrons, le Cuivre ${}^{63}_{29}Cu$ 63 nucléons dont 29 protons (donc 29 électrons) et 34 neutrons. L'atome de cuivre existe aussi sous la forme ${}^{64}_{29}Cu$, c'est à dire avec 35 neutrons au lieu de 34 : c'est ce qu'on appelle un **isotope**.

Valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International :

Electron :	$q_e = -e = -1.602\ 10^{-19}$ C	$m_e = 9.109\ 10^{-31}$ kg
Proton :	$q_p = +e = 1.602\ 10^{-19}$ C	$m_p = 1.672\ 10^{-27}$ kg
Neutron :	$q_n = 0$ C	$m_n = 1.674\ 10^{-27}$ kg

Comme on peut le remarquer, même une charge de l'ordre du Coulomb (ce qui est énorme), correspondant à environ 10^{18} électrons, ne produit qu'un accroissement de poids de l'ordre de 10^{-12} kg : c'est effectivement imperceptible.

Si les électrons sont bien des particules quasi-ponctuelles, les neutrons et les protons en revanche ont une taille non nulle (inférieure à 10^{-15} m). Il s'avère qu'ils sont eux-mêmes constitués de **quarks**, qui sont aujourd'hui, avec les électrons, les vraies briques élémentaires de la matière. Les protons ainsi que les neutrons forment ainsi une classe de particules appelée les **baryons**.

A l'heure actuelle, l'univers (ou plutôt l'ensemble reconnu de ses manifestations) est descriptible à l'aide de quatre forces fondamentales :

1) La force nucléaire faible, responsable de la cohésion des baryons (quarks-quarks);
2) La force nucléaire forte, responsable de la cohésion du noyau (protons-neutrons) ;
3) La force électromagnétique, responsable de la cohésion de l'atome (électrons-nucléons) ;
4) La force gravitationnelle, responsable de la structure à grande échelle de l'univers (cohésion des corps astrophysiques, cohésion des systèmes planétaires, des galaxies, des amas galactiques, moteur de la cosmologie).

I.1.3- Les divers états de la matière

La cohésion de la matière est due à l'interaction entre ses constituants, interaction mettant en jeu une énergie de liaison. Or, chaque constituant (atome ou molécule) possède lui-même de l'énergie cinétique liée à sa température (énergie d'agitation thermique). La rigidité d'un état particulier de la matière dépend donc de l'importance relative de ces deux énergies (cinétique et liaison).

Si l'on prend un gaz constitué d'atomes (ou de molécules) neutres, alors l'interaction entre deux constituants est assez faible : elle ne se produit que lorsqu'ils sont assez proches pour qu'il y ait répulsion entre les électrons périphériques. Ainsi, chaque atome est relativement libre de se déplacer dans l'espace, au gré des « collisions » avec d'autres atomes.

Si l'on refroidit ce gaz, certaines liaisons électrostatiques qui étaient négligeables auparavant peuvent devenir opérantes et l'on obtient alors un liquide. Si l'on chauffe ce gaz, de l'énergie est fournie à ses constituants, les molécules se brisent et, si l'on continue à chauffer, on peut même libérer un ou plusieurs électrons périphériques des atomes, produisant ainsi un gaz d'ions ou plasma.

Dans un solide au contraire, les liaisons entre chaque atome sont beaucoup plus fortes et les atomes ne bougent quasiment pas, formant un cristal. La force de cette cohésion dépend beaucoup d'un solide à l'autre. Ainsi, elle est très puissante si les atomes mettent en commun leur cortège électronique (liaison covalente comme pour le diamant et liaison métallique, comme pour le Cuivre) et beaucoup plus faible si les cortèges électroniques de chaque atome restent intouchés (liaison ionique, comme pour le sel).

Enfin, la matière molle (caoutchouc, plastiques, textiles, mousses) possède une hiérarchie du point de vue de sa cohésion : elle est constituée d'éléments « solides » (macromolécules liées par des liaisons covalentes) interagissant entre eux par des liaisons ioniques (électrostatiques).

I.1.4- Matériaux isolants et matériaux conducteurs

Un matériau est ainsi constitué d'un grand nombre de charges électriques, mais celles-ci sont toutes compensées (même nombre d'électrons et de protons). Aux températures usuelles, la matière est électriquement neutre. En conséquence, lorsque des effets d'électricité statique se produisent, cela signifie qu'il y a eu un déplacement de charges, d'un matériau vers un autre : c'est ce que l'on appelle l'électrisation d'un corps. Ce sont ces charges, en excès ou en manque, en tout cas non compensées, qui sont responsables des effets électriques sur ce corps (ex : baguette frottée).

Un matériau est dit **conducteur parfait** si, lorsqu'il devient électrisé, les porteurs de charge non compensés peuvent se déplacer librement dans tout le volume occupé par le matériau.

Ce sera un **isolant (ou diélectrique) parfait** si les porteurs de charge non compensés ne peuvent se déplacer librement et restent localisés à l'endroit où ils ont été déposés.

Un matériau quelconque se situe évidemment quelque part entre ces deux états extrêmes. Cette propriété de conduction de l'électricité sera abordée plus loin, dans le Chapitre sur l'électrocinétique.

Refaisons une expérience d'électricité statique : prenons une baguette métallique par la main et frottons-la avec un chiffon. Cela ne marchera pas, la baguette ne sera pas électrisée. Pourquoi ? Etant nous-mêmes d'assez bons conducteurs, les charges électriques arrachées au chiffon et transférées à la baguette sont ensuite transférées sur nous et l'on ne verra plus d'effet électrique particulier au niveau de la baguette. Pour que cette expérience marche, il est nécessaire d'isoler électriquement la baguette (en la tenant avec un matériau diélectrique).

I.2- Force et champ électrostatiques

I.2.1- La force de Coulomb

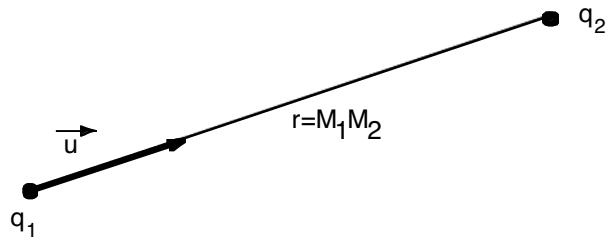
Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures (à l'aide d'une balance de torsion) qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2:

1) La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
2) Elle est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon ;
3) Enfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

L'expression mathématique moderne de la force de Coulomb et traduisant les propriétés ci-dessus est la suivante

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}}$$

où la constante multiplicative vaut $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\,10^9$ SI (N m^{2}C^{-2}). La constante ε_0 joue un rôle particulier et est appelée la **permittivité électrique du vide** (unités : Farad/m).



Remarques :

1) Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles (approximation de l'électrostatique) et dans le vide. Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
2) Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.
3) A part la valeur numérique de la constante K, cette loi a exactement les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation (loi de Newton). Il ne sera donc pas étonnant de trouver des similitudes entre ces deux lois.

Ordres de grandeur

- Quel est le rapport entre la force d'attraction gravitationnelle et la répulsion coulombienne entre deux électrons ?

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{G m_e^{\,2}} \approx 4\,10^{42}$$

  La force électrostatique apparaît donc dominante vis-à-vis de l'attraction gravitationnelle. Cela implique donc que tous les corps célestes sont exactement électriquement neutres.
- Quelle est la force de répulsion coulombienne entre deux charges de 1 C situées à 1 km ?

$$\frac{Fe}{g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(10^3\right)^2}\frac{1}{10} \approx 10^3 \text{ kg}$$

  C'est une force équivalente au poids exercé par une tonne !

I.2.2- Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

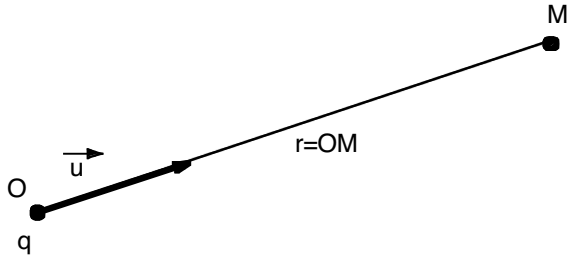
Soit une charge q_1 située en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb ci-dessus. Mais comme pour l'attraction gravitationnelle, on peut la mettre sous une forme plus intéressante,

$$\vec{F}_{1/2} = q_2\vec{E}_1(M)$$

où

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la particule qui subit la force (ici, c'est sa charge q_2, pour la gravité c'est sa masse), de ce qui ne dépend que d'une source extérieure, ici le vecteur $\vec{E}_1(M)$.



Définition : *Une particule de charge q située en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel*

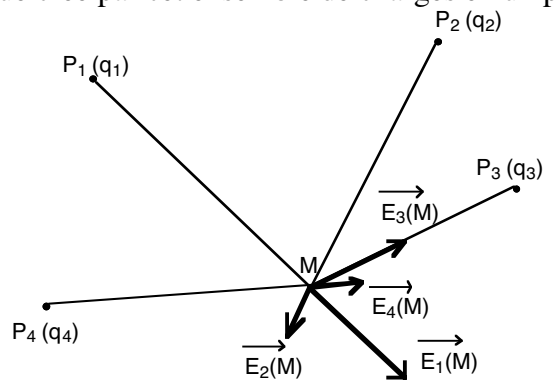
$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}}$$

appelé champ électrostatique. L'unité est le Volt/mètre (symbole V/m).

Cette façon de procéder découle de (ou implique) une nouvelle vision de l'espace : les particules chargées se déplacent maintenant dans un espace où existe (se trouve défini) un champ vectoriel. Elles subissent alors une force en fonction de la valeur du champ au lieu où elle se trouve.

I.2.3- Champ créé par un ensemble de charges

On considère maintenant n particules de charges électriques q_i, situées en des points P_i : quel est le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M ?



La réponse n'est absolument pas évidente car l'on pourrait penser que la présence du champ créé par des particules voisines modifie celui créé par une particule. En fait, il n'en est rien et l'expérience montre que la force totale subie par une charge q située en M est simplement la superposition des forces élémentaires,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} = q\vec{E}(M)$$

où $r_i = P_iM$, $\overrightarrow{P_iM} = P_iM\,\vec{u_i}$ et il en résulte donc

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i}}$$

est donc le champ électrostatique créé par un ensemble discret de charges.

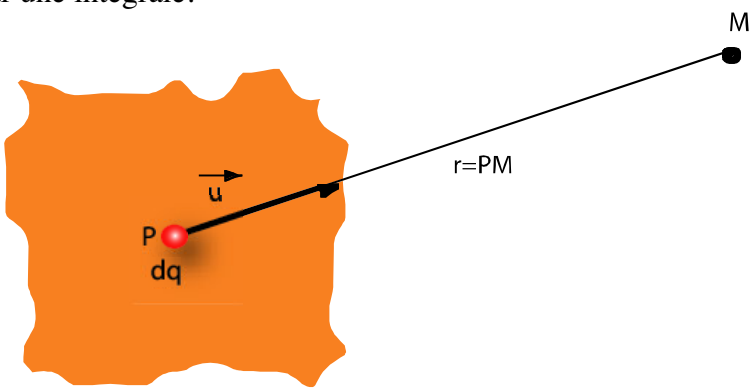
Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncé comme le **principe de superposition** (comme tout principe, il n'est pas démontré).

En pratique, cette expression est rarement utilisable puisque nous sommes la plupart du temps amenés à considérer des matériaux comportant un nombre gigantesque de particules. C'est simplement dû au fait que l'on ne considère que des échelles spatiales tres grandes devant les distances inter-particulaires, perdant ainsi toute possibilité de distinguer une particule de l'autre. Il est dans ce cas plus habile d'utiliser des distributions continues de charges.

Soit P un point quelconque d'un conducteur et dq(P) la charge élémentaire contenue en ce point. Le champ électrostatique total créé en un point M par cette distribution de charges est

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int_{distribution} \overrightarrow{dE}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}}$$

Mathématiquement, tout se passe donc comme une charge ponctuelle dq était située en un point P de la distribution, créant au point M un champ électrostatique $\overrightarrow{dE}(M)$, avec $r = PM$ et $\overrightarrow{PM} = PM\,\vec{u}$. Il s'agit évidemment d'une approximation, permettant de remplacer une somme presque infinie par une intégrale.



On définit $\rho = \dfrac{dq}{d\upsilon}$ comme étant la **densité volumique de charges** (unités : Cm^{-3}). Le champ électrostatique créé par une telle distribution est donc

$$\vec{E}(M) = \iiint_{\text{Volume}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho}{r^2}\,\vec{u}\,d\upsilon$$

Lorsque l'une des dimensions de la distribution de charges est beaucoup plus petite que les deux autres (ex : un plan ou une sphère creuse), on peut généralement faire une intégration sur cette dimension. On définit alors la **densité surfacique de charges** $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ (unités : Cm^{-2}), produisant un champ total

$$\vec{E}(M) = \iint_{Surface} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{r^2}\,\vec{u}\,dS$$

Enfin, si deux des dimensions de la distribution sont négligeables devant la troisième (ex : un fil), on peut définir une **densité linéique de charges** $\lambda = \dfrac{dq}{dl}$ (unités : Cm^{-1}), associé au champ

$$\vec{E}(M) = \int_{\text{Longueur}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\,\vec{u}\,dl$$

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces trois expressions dépend de la géométrie de la distribution de charges considérée. L'expression générale à retenir est celle qui est encadrée.

I.2.4- Propriétés de symétrie du champ électrostatique

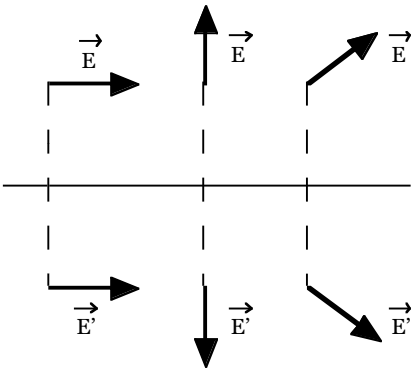
Principe de Curie : *« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. »*

Du fait que le champ soit un effet créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique

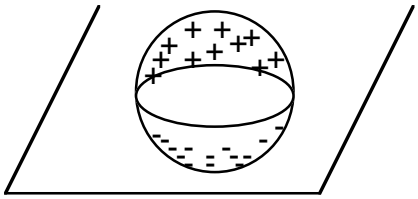
associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique.

Dans une espace homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique à un système physique (ex : ensemble de particules, distribution de charges) susceptible de créer certains effets (forces, champs), alors ces effets subissent les mêmes transformations.
Si un système physique S possède un certain degré de symétrie, on pourra alors déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point.

Transformations géométriques d'un vecteur
Lors d'une transformation géométrique d'un vecteur quelconque, celui-ci est transformé en son symétrique.



Transformation d'un vecteur par symétrie par rapport à un plan



Exemple d'un plan d'antisymétrie

Soit $\vec{A'}(M')$ le vecteur obtenu par symétrie par rapport à un plan S à partir de $\vec{A}(M)$. D'après la figure ci-dessus, on voit que

1. $\vec{A'}(M') = \vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est engendré par les mêmes vecteurs de base que S ;
2. $\vec{A'}(M') = -\vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à S.

Ces deux règles de transformation vont nous permettre de déterminer des règles de symétrie utiles.

Règles de symétrie

- <u>Invariance par translation</u> : si S est invariant dans toute translation parallèle à un axe Oz, les effets ne dépendent pas de z.
- <u>Symétrie axiale</u> : si S est invariant dans toute rotation θ autour d'un axe Oz, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) ne dépendent pas de θ.
- <u>Symétrie cylindrique</u> : si S est invariant par translation le long de l'axe Oz et rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) ne dépendent que de la distance à l'axe ρ.
- <u>Symétrie sphérique</u> : si S est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques (r,θ,φ) ne dépendent que de la distance au centre r.
- <u>Plan de symétrie $\prod$</u>: si S admet un plan de symétrie $\prod$, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.
- <u>Plan d'antisymétrie $\prod$'</u> : si, par symétrie par rapport à un plan $\prod$', S est transformé en –S, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique lui est perpendiculaire.

Remarque importante
Nous verrons en magnétostatique qu'il convient de faire la distinction entre vrais vecteurs (ou vecteurs axiaux) et pseudo-vecteurs (ou vecteurs polaires), ces derniers étant définis à partir du produit vectoriel de deux vecteurs vrais. Ainsi, le champ électrostatique est un vrai vecteur tandis que le champ magnétique est un pseudo-vecteur. Tout ce qui a été dit ci-dessus n'est valable que pour les vrais vecteurs.

Quelques Compléments :
1) Pourquoi un vrai vecteur $\vec{A}(x_1,x_2,x_3)$ est indépendant de la variable x_1 si le système S n'en dépend pas ?
Soit un point $M(x_1,x_2,x_3)$ dont les coordonnées sont exprimées dans un système quelconque. Soit un point $M'(x_1+dx_1,x_2,x_3)$ lui étant infiniment proche. On a alors

$$\vec{A}(M') = \begin{cases} A_1(M') = A_1(x_1+dx_1,x_2,x_3) \approx A_1(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1 \\ A_2(M') = A_2(x_1+dx_1,x_2,x_3) \approx A_2(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1}dx_1 \\ A_3(M') = A_3(x_1+dx_1,x_2,x_3) \approx A_3(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1}dx_1 \end{cases}$$

c'est à dire, de façon plus compacte $\vec{A}(M') = \vec{A}(M) + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x_1}dx_1$. Si le système physique S reste invariant lors d'un changement de M en M', alors (Principe de Curie) $\vec{A'}(M') = \vec{A}(M)$. On a donc $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} = \vec{0}$ en tout point M, ce qui signifie que $\vec{A}(x_2,x_3)$ ne dépend pas de x_1. On peut suivre le même raisonnement pour chacune des autres coordonnées.

2) Pourquoi un vrai vecteur appartient nécessairement à un plan $\prod$ de symétrie ?
Quel que soit M de S, soit M' son symétrique par rapport à $\prod$. Ce plan étant un plan de symétrie, cela signifie que f(M)=f(M') pour toute fonction de M. Ceci est en particulier vrai pour chaque composante $A_i(M) = A_i(M')$ du vecteur $\vec{A}(M)$. On a donc $\vec{A'}(M') = \vec{A}(M)$ ce qui implique que $\vec{A}(M)$ est engendré par les mêmes vecteurs de base que $\prod$.

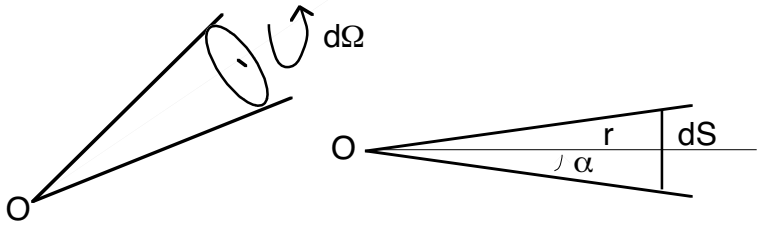
3) Pourquoi un vrai vecteur est nécessairement perpendiculaire à un plan $\prod$' d'antisymétrie ?
Ce plan étant un plan d'antisymétrie, on a f(M')=-f(M) pour toute fonction de M. Ceci étant vrai pour chaque composante du vecteur $\vec{A}(M)$, on a donc $A_i(M') = -A_i(M)$, ce qui implique que $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à $\prod$'.

Chapitre II- Lois fondamentales de l'électrostatique

II.1- Flux du champ électrostatique

II.1.1- Notion d'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan. Par exemple, le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche est entièrement décrit par la donnée de deux grandeurs : la direction (une droite) et l'angle maximal d'ouverture des rayons autour de cette droite. On appelle cette droite la génératrice du cône et l'angle en question, l'angle au sommet.



Définition : l'angle solide élémentaire dΩ, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut

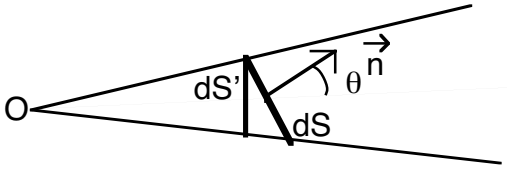
$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}}$$

Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r. Son unité est le « stéradian » (symbole sr).

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Le demi-espace, engendré avec α=π/2 (radians), correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π (α=π).



D'une façon générale, le cône (ou le faisceau lumineux de l'exemple ci-dessus) peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}$. L'angle solide élémentaire est alors défini par

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS\, \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

où dS' est la surface effective (qui, par exemple, serait « vue » par un observateur situé en O).

II.1.2- Théorème de Gauss

On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$, créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition

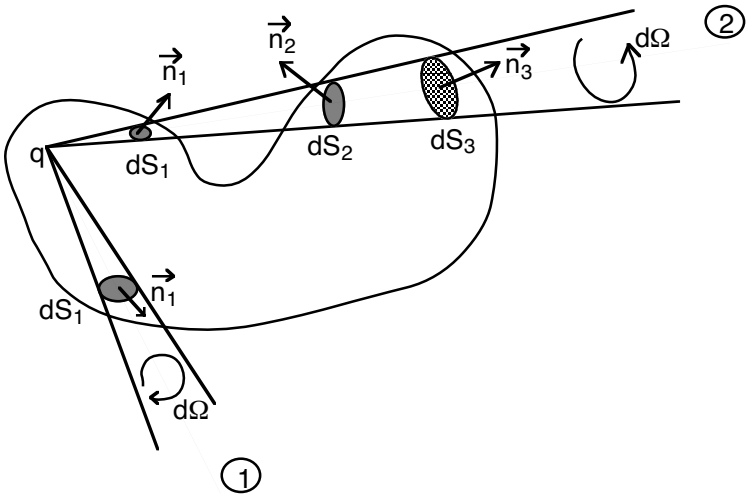
$$d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal à la surface dS, vers l'extérieur, c'est à dire dans la direction qui s'éloigne de la charge q. Ainsi, pour q>0, le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le même sens que $\vec{n}$ et l'on obtient un flux positif.

A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

c'est à dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r (notez bien que dΩ>0, q pouvant être positif ou négatif). Ce résultat est une simple conséquence de la décroissance du champ électrostatique en $1/r^2$: on aurait le même genre de résultat avec le champ gravitationnel.



Que se passe-t-il lorsqu'on s'intéresse au flux total à travers une surface (quelconque) fermée ? Prenons le cas illustré dans la figure ci-dessous. On a une charge q située à l'intérieur de la surface S (enfermant ainsi un volume V), surface orientée (en chaque point de S, le vecteur $\vec{n}$ est dirigé vers l'extérieur). Pour le rayon 1, on a simplement

$$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

mais le rayon 2 traverse plusieurs fois la surface, avec des directions différentes. On aura alors une contribution au flux

$$d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{n_1}}{r_1^2}dS_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{n_2}}{r_2^2}dS_2 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{n_3}}{r_3^2}dS_3\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(d\Omega \quad - \quad d\Omega \quad + \quad d\Omega\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Ce résultat est général puisque, la charge se trouvant à l'intérieur de S, un rayon dans une direction donnée va toujours traverser S un nombre impair de fois. En intégrant alors sur toutes les directions (c'est à dire sur les 4π stéradians), on obtient un flux total

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

Théorème de Gauss : *le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à* $1/\varepsilon_0$ *fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface*

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

R*emarques* :

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.
2. La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale, non démontrable (l'une des quatre équations de Maxwell).

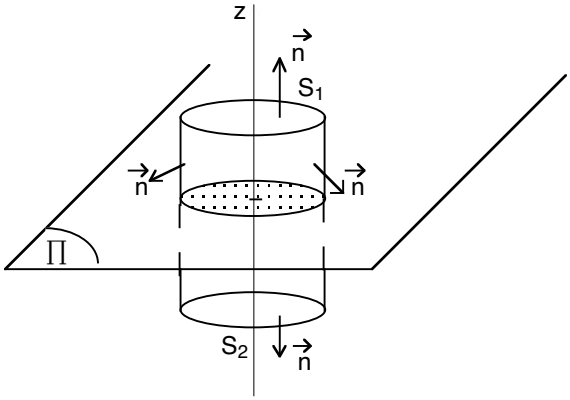
II.1.3- Exemples d'applications

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer <u>facilement</u> le flux Φ. Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ».

<u>*Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé*</u>

On considère un plan infini ∏ portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface. Pour utiliser Gauss, il nous faut d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$.
Tous les plans perpendiculaires au plan infini ∏ sont des plans de symétrie de celui-ci : $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à ∏. Si ce plan est engendré par

les vecteurs $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ alors $\vec{E} = E_z(x,y,z)\vec{k}$. Par ailleurs, l'invariance par translation selon x et y nous fournit $\vec{E} = E_z(z)\vec{k}$. Le plan $\prod$ est lui-même plan de symétrie, donc E(z) est impaire.



Etant donné ces propriétés de symétrie, la surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situées à des hauteurs symétriques.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}\cdot\vec{dS}$$

$$= E(z)S - E(-z)S + 0 = 2ES$$

$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_S \sigma dS = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

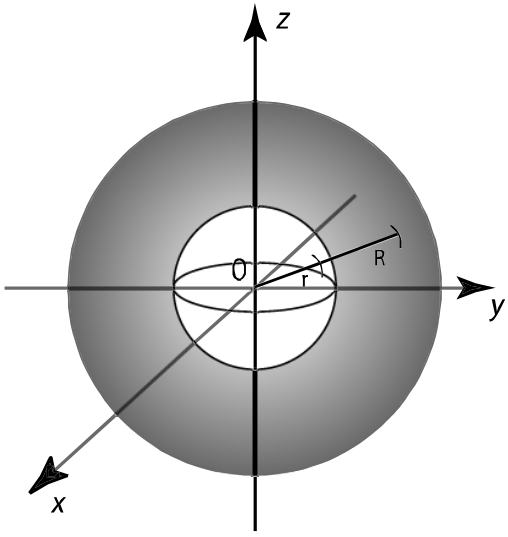
Il s'ensuit que le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Remarques :

1. Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini .
2. On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément. Il suffit alors d'interpréter E comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

<u>*Champ créé par une boule uniformément chargée*</u>



On considère une boule (sphère pleine) de centre O et rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges ρ. Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$.

La surface de Gauss adaptée est simplement une sphère de rayon r et le théorème de Gauss nous fournit

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_S E(r)dS = E(r)\,4\pi r^2$$

$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, d\mathcal{V}$$

Lorsque r<R, on obtient un champ

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Lorsque r>R, la sphère de Gauss enferme un volume V supérieur à celui de la boule. Mais la distribution de charges n'est non nulle que jusqu'en r=R, ce qui fournit donc un champ

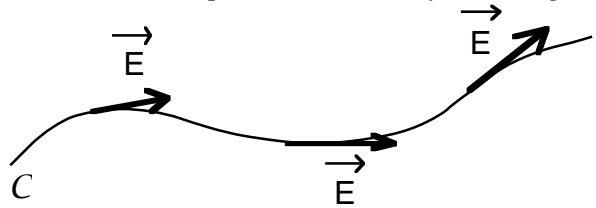
$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

où Q est la charge totale portée par la boule. On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit <u>à l'extérieur</u> le même champ qu'une charge ponctuelle égale, située en O.

II.1.4- Lignes de champ

Le concept de *lignes de champ* (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs.

Définition : *Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent.*



Considérons un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ le long d'une ligne de champ électrostatique C. Le fait que le champ $\vec{E}$ soit en tout point de C parallèle à $\vec{dl}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}}$$

En coordonnées cartésiennes, $\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques $\vec{dl} = d\rho\,\vec{u_\rho} + \rho d\theta\,\vec{u_\theta} + dz\,\vec{u_z}$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{dl} = dr\,\vec{u_r} + rd\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\vec{u_\varphi}$ et on a

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

Soit un contour <u>fermé</u> C tel que le champ électrostatique y soit tangent, c'est à dire tel que $\vec{E}\perp\vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est un vecteur élémentaire de C. En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. L'ensemble de toutes les lignes de champ dessine alors une surface dans l'espace, une sorte de tube. Par construction, le flux du champ électrostatique est nul à travers la surface latérale du tube, de telle sorte que le flux est conservé : ce qui rentre à la base du tube ressort de l'autre coté. On appelle un tel « rassemblement » de lignes de champ un *tube de flux*.

II.2- Circulation du champ électrostatique

II.2.2- Notion de potentiel électrostatique

On va démontrer ci-dessous qu'il existe un scalaire V, appelé potentiel électrostatique, définit dans tout l'espace et qui permet de reconstruire le champ électrostatique $\vec{E}$. Outre une commodité de calcul (il est plus facile d'additionner deux scalaires que deux vecteurs), l'existence d'un tel scalaire traduit des propriétés importantes du champ électrostatique. Mais tout d'abord, est-il possible d'obtenir un champ de vecteurs à partir d'un champ scalaire ?

Prenons un scalaire V(M) défini en tout point M de l'espace (on dit un champ scalaire). Une variation dV de ce champ lorsqu'on passe d'un point M à un point M' infiniment proche est alors fourni par la différentielle totale

$$dV(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{grad}\, V \cdot \overrightarrow{dOM}$$

où le vecteur $\overrightarrow{grad}\, V$, est le gradient du champ scalaire V et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{dOM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ et

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

d'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En faisant de même en coordonnées cylindriques et sphériques on trouve respectivement

$$\overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Un déplacement $\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'}$ le long d'une courbe (ou surface) définie par V=Constante correspond à dV=0, ce qui signifie que $\overrightarrow{grad}\,V$ est un vecteur qui est perpendiculaire en tout point à cette courbe (ou surface).

Par ailleurs, plus les composantes du gradient sont élevées et plus il y a une variation rapide de V. Or, c'est bien ce qui semble se produire, par exemple, au voisinage d'une charge électrique q: les lignes de champ électrostatique sont des droites qui convergent (q<0) ou divergent (q>0) toutes vers la charge. Il est donc tentant d'associer le champ $\vec{E}$ (vecteur) au gradient d'une fonction scalaire V.

En fait, depuis Newton (1687) et sa loi de gravitation universelle, de nombreux physiciens et mathématiciens s'étaient penché sur les propriétés de cette force radiale en $1/r^2$. En particulier Lagrange avait ainsi introduit en 1777 une fonction scalaire appelée potentiel, plus « fondamentale » puisque la force en dérive. C'est Poisson qui a introduit le potentiel électrostatique en 1813, par analogie avec la loi de Newton.

Définition : le potentiel électrostatique V est relié au champ électrostatique $\vec{E}$ par

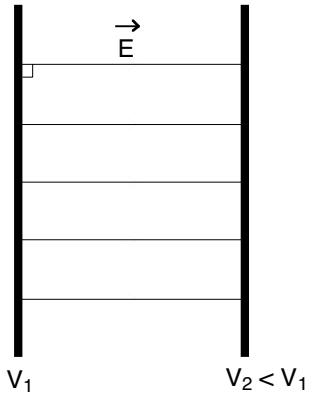
$$\boxed{\vec{E} = -\,\overrightarrow{grad}\,V}$$

Remarques :

1. Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique (cf chapitre IV).
2. La conséquence de cette définition du potentiel est $dV(M) = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM}$ pour un déplacement infinitésimal quelconque.
3. *Les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires aux courbes équipotentielles.*

***Définition** : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est*

$$\boxed{\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)}$$

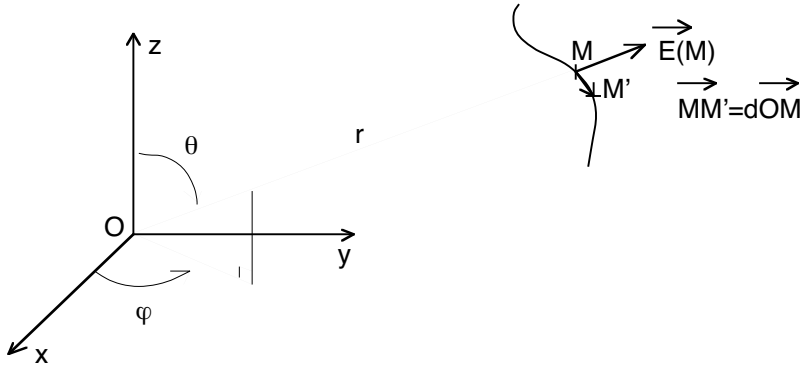


Remarques :

1. Cette circulation est conservative : elle ne dépend pas du chemin suivi.
2. La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée (on retourne en A) est nulle. On verra plus loin que ceci est d'une grande importance en électrocinétique.
3. D'après la relation ci-dessus, le long d'une ligne de champ, c'est à dire pour $\vec{E}\cdot\vec{dl} > 0$ on a V(A)>V(B). *Les lignes de champ électrostatiques vont dans le sens des potentiels décroissants.*

II.2.2- Potentiel créé par une charge ponctuelle

Nous venons de voir l'interprétation géométrique du gradient d'une fonction scalaire et le lien avec la notion de circulation. Mais nous n'avons pas encore prouvé que le champ électrostatique pouvait effectivement se déduire d'un potentiel V !



Considérons donc une charge ponctuelle q située en un point O. En un point M de l'espace, cette charge crée un champ électrostatique $\vec{E}$. Le potentiel électrostatique est alors donné par

$$dV(M) = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\vec{dr}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

c'est à dire, après intégration suivant r,

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad + \quad V_0}$$

Remarques :

1. La constante d'intégration est en général choisie nulle (le potentiel s'annule à l'infini)
2. L'unité du potentiel est le *Volt* . En unités du système international (SI) le Volt vaut
$$[V] = [E\ L] = M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-1}$$
3. Si l'on veut se former une représentation du potentiel, on peut remarquer qu'il mesure le degré d'électrification d'un conducteur (voir Chapitre III). Il y a en fait une analogie formelle entre d'un coté, potentiel V et température T d'un corps, et de l'autre, entre charge Q et chaleur déposée dans ce corps.

II.2.3- Potentiel créé par un ensemble de charges

Considérons maintenant un ensemble de n charges ponctuelles q_i distribuées dans tout l'espace. En vertu du principe de superposition, le champ électrostatique total $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}$ est la somme vectorielle des champs $\vec{E_i}$ créés par chaque charge q_i. On peut donc définir un potentiel électrostatique total $V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M)$ tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ soit encore vérifié. En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on obtient

$$\boxed{V(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} \quad + \quad V_0}$$

où r_i est la distance entre la charge q_i et le point M.

Lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales qui sont très grandes par rapport aux distances entre les charges q_i, on peut faire un passage à la limite continue et remplacer la somme discrète par une intégrale $\sum_i q_i(P_i) \rightarrow \int dq(P)$ où P est un point courant autour duquel se trouve une charge « élémentaire » dq. Le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continue est alors

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} + V_0}$$

où r=PM est la distance entre le point M et un point P quelconque de la distribution de charges.

Remarques :

1. Pour des distributions de charges linéique λ, surfacique σ et volumique ρ, on obtient respectivement

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda\, dl}{r} + V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma\, dS}{r} + V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho\, d\mathcal{V}}{r} + V_0$$

2. Noter que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule en utilisant l'expression discrète (c'est à dire pour $r_i = 0$). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que dq/r converge lorsque r tend vers zéro.

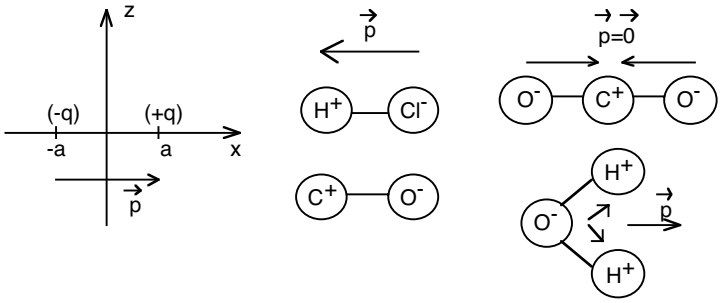
II.3- Le dipôle électrostatique

II.3.1- Potentiel électrostatique créé par deux charges électriques

Il existe dans la nature des systèmes globalement électriquement neutres mais dont le centre de gravité des charges négatives n'est pas confondu avec celui des charges positives. Un tel système peut souvent être décrit (on dit modélisé) en première approximation par deux charges électriques ponctuelles, +q et –q situées à une distance d=2a l'une de l'autre. On appelle un tel système de charges un dipôle électrostatique.

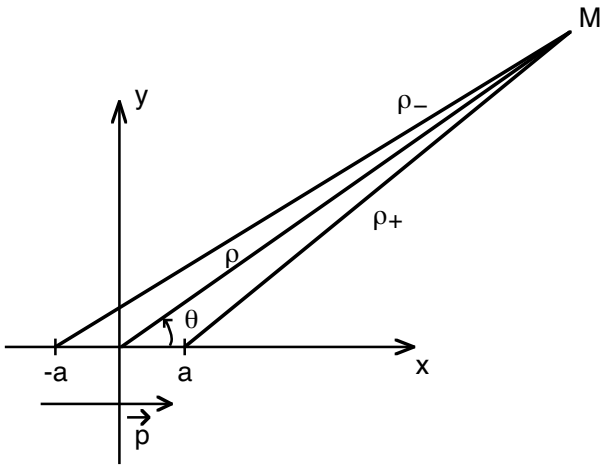
Définition : *on appelle moment dipolaire électrique la grandeur*

$$\boxed{\vec{p} = qd\,\vec{i} = 2aq\,\vec{i}}$$



Les molécules telles que HCL,CO,H20,CO2 constituent des exemples de dipôles électrostatiques.

Connaître l'effet (la force) électrostatique que ces deux charges créent autour d'elles nécessite de calculer le champ électrostatique. Habituellement, nous aurions appliqué le principe de superposition et calculé ainsi la somme vectorielle des deux champs. L'avantage du potentiel est de permettre d'arriver au même résultat sans se fatiguer.



D'après la section précédente, le potentiel créé en un point M repéré par ses coordonnées polaires (ρ,θ) est simplement

$$V(M) = V_{+q}(M) \quad + \quad V_{-q}(M)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_- - \rho_+}{\rho_+\rho_-}$$

où l'on a choisi arbitrairement V=0 à l'infini. Or, $\overrightarrow{\rho_\pm} = \vec{\rho} \mp a\vec{i}$. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'action électrostatique à grande distance, c'est à dire à des distances ρ>>a, on peut faire un développement limité de V. Au premier ordre en a /ρ on obtient

$$\rho_\pm = \left(\overrightarrow{\rho_\pm}\cdot\overrightarrow{\rho_\pm}\right)^{1/2} \approx \rho\left(1 \mp 2\frac{a}{\rho^2}\vec{\rho}\cdot\vec{i}\right)^{1/2} \approx \rho \mp a\cos\theta$$

c'est à dire $\rho_- - \rho_+ \approx 2a\cos\theta$ et $\rho_-\rho_+ \approx \rho^2$. Le potentiel créé à grande distance par un dipôle électrostatique vaut donc

$$\boxed{V(M) = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^2} = \frac{\vec{p}\cdot\overrightarrow{u_\rho}}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^2}}$$

II.3.2- Champ créé à grande distance

Pour calculer le champ électrostatique, il nous suffit maintenant d'utiliser $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ en coordonnées cylindriques. On obtient ainsi

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\ \rho^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\ \rho^3} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}$$

Par construction, le dipôle possède une symétrie de révolution autour de l'axe qui le porte (ici l'axe Ox) : le potentiel ainsi que le champ électrostatiques possèdent donc également cette symétrie. Cela va nous aider à visualiser les lignes de champ ainsi que les équipotentielles. Par exemple, le plan médiateur défini par $\theta = \pi/2$ (x=0) est une surface équipotentielle V=0.
Les équipotentielles sont des surfaces (dans l'espace ; dans le plan ce sont des courbes) définies par $V = \text{Constante} = V_0$, c'est à dire

$$\rho = \sqrt{\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 V_0}}$$

L'équation des lignes de champ est obtenue en résolvant

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\cos\theta\ d\theta}{\sin\theta}$$

$$\rho = K\sin^2\theta$$

où K est une constante d'intégration dont la valeur (arbitraire) définie la ligne de champ.

II.3.3- *Complément* : développements multipolaires

Lorsqu'on a affaire à une distribution de charges électriques et qu'on ne s'intéresse qu'au champ créé à une distance grande devant les dimensions de cette distribution, on peut également utiliser une méthode de calcul approché du potentiel. Le degré de validité de ce calcul dépend directement de l'ordre du développement limité utilisé : plus on va à un ordre élevé et meilleure sera notre approximation. Par exemple, l'expression du dipôle ci-dessus n'est valable que pour ρ>>a, mais lorsque ρ tend vers a, il faut prendre en compte les ordres supérieurs, les termes dits multipolaires.

Prenons le cas d'une distribution de charges ponctuelles q_i situées en $\vec{r_i} = \overrightarrow{OP_i}$. Le potentiel créé en un point M repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (coordonnées sphériques) est

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|}$$

En supposant $r >> r_i$, on peut montrer facilement que ce potentiel admet le développement suivant

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{r} + \frac{q_i r_i \cos\theta_i}{r^2} + \frac{q_i r_i^2}{2r^3}\left(3\cos^2\theta_i - 1\right) + ... \right)$$

où θ_i est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{r_i}$. Faire un développement multipolaire d'une distribution quelconque de charges consiste à arrêter le développement limité à un ordre donné, dépendant du degré de précision souhaité. Dans le développement ci-dessus, le premier terme (ordre zéro ou *monopolaire*) correspond à assimiler la distribution à une charge totale placée en O. Cela peut être suffisant vu de très loin, si cette charge totale est non nulle. Dans le cas contraire (ou si l'on souhaite plus de précision) on obtient le deuxième terme qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

où le vecteur $\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r_i}}$ est le *moment dipolaire* associé à la distribution de charges, généralisation à plusieurs charges du moment dipolaire précédent. Lorsqu'on souhaite encore plus de précision (ou si $\vec{p} = \vec{0}$) il faut prendre en compte les termes d'ordre supérieur. Le terme suivant est la contribution *quadrupolaire,* décrivant la façon dont les charges positives et négatives se distribuent autour de leurs barycentres respectifs.

Chapitre III- Conducteurs en équilibre

III.1- Conducteurs isolés

III.1.1- Notion d'équilibre électrostatique

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement aux charges électriques et à leurs effets. Que se passe-t-il pour un corps conducteur dans lequel les charges sont libres de se déplacer?

Prenons une baguette en plastique et frottons-la. On sait qu'elle devient électrisée parce qu'elle devient alors capable d'attirer de petits bouts de papier. Si on la met en contact avec une autre baguette, alors cette deuxième devient également électrisée, c'est à dire atteint un certain degré d'électrisation. Au moment du contact des deux baguettes, des charges électriques passent de l'une à l'autre, modifiant ainsi le nombre de charges contenues dans chacune des baguettes, jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint. Comment définir un tel équilibre ?

Définition *: l'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsque aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur.*

Du point de vue de chaque charge élémentaire, cela signifie que le champ électrostatique total auquel elle est soumise est nul.
Comme le champ dérive d'un potentiel, cela implique qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel.

Remarques :

1. Si le conducteur est chargé, le champ électrostatique total est (principe de superposition) la somme du champ extérieur et du champ créé par la distribution de charges contenues dans le conducteur. Cela signifie que les charges s'arrangent (se déplacent) de telle sorte que le champ qu'elles créent compense exactement, en tout point du conducteur, le champ extérieur.
2. Nous voyons apparaître ici une analogie possible avec la thermodynamique :

   Equilibre électrostatique ⇔ Equilibre thermodynamique
   Potentiel électrostatique ⇔ Température
   Charges électriques ⇔ Chaleur

   En effet, à l'équilibre thermodynamique, deux corps de températures initialement différentes mis en contact, acquièrent la même température finale en échangeant de la chaleur (du plus chaud vers le plus froid).

Dans ce cours, tous les conducteurs seront considérés à l'équilibre électrostatique.

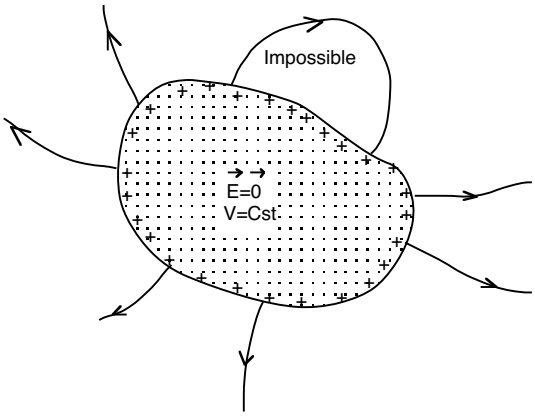
III.1.2- Quelques propriétés des conducteurs en équilibre

(a) Lignes de champ

Nous avons vu que, *à l'intérieur* d'un conducteur (chargé ou non) le champ électrostatique total est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si le conducteur est chargé. Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel, cela entraîne alors que, sa surface étant au même potentiel, le champ électrostatique est normal à la surface d'un conducteur.
Par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur. En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Si les points A et B appartiennent au même conducteur, alors la circulation doit être nulle, ce qui est impossible le long d'une ligne de champ (où, par définition $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{dl}$).



(b) Distribution des charges

Si un conducteur est chargé, où se trouvent les charges non compensées? Supposons qu'elles soient distribuées avec une distribution volumique ρ. Prenons un volume quelconque V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\mathcal{V} = 0$$

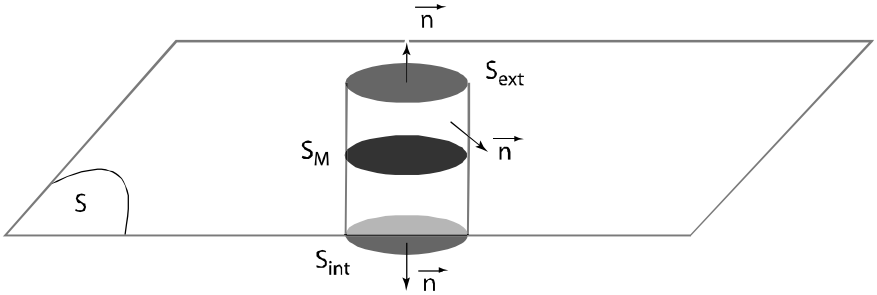
puisque le champ $\vec{E}$ est nul partout. Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.
Ce résultat peut se comprendre par l'effet de répulsion que celles-ci exercent les unes sur les autres. A l'équilibre, les charges tendent donc à se trouver aussi éloignées les unes des autres qu'il est possible de le faire.

(c) Théorème de Coulomb

En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur, le champ électrostatique $\vec{E}$ est normal à S. Considérons une petite surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée $\sum$ en y adjoignant une surface rentrant à l'intérieur du conducteur S_{int} ainsi qu'une surface latérale S_L. En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_L} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_{ext}} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_{\text{int}}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_{ext}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E\,S_{ext}$$

$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{S_M} \sigma dS = \frac{\sigma S_M}{\varepsilon_0}$$



où S_M est la surface dessinée par le tube de flux passant par S_{ext}, donc $S_M = S_{ext}$ (on peut choisir ces surfaces aussi petites que l'on veut).

Théorème : *le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut*

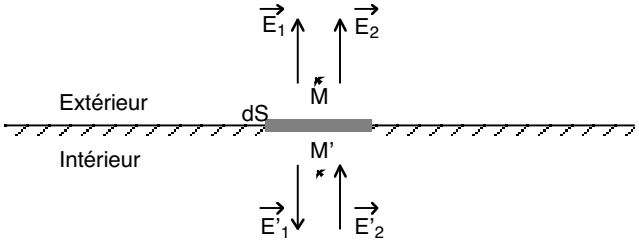
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

Lorsque le champ au voisinage d'un conducteur dépasse une certaine limite, une étincelle est observée : le milieu entourant le conducteur devient alors conducteur. Ce champ maximal, de l'ordre de 3 Méga V/m dans l'air, est appelé *champ disruptif*. Il correspond à l'ionisation des particules du milieu (molécules dans le cas de l'air).

(d) Pression électrostatique

Soient deux points M et M' infiniment proches de la surface d'un conducteur de densité surfacique σ, M situé à l'extérieur tandis que M' est situé à l'intérieur. Considérons maintenant une surface élémentaire dS située entre ces deux points. Soit $\vec{E}_1$ le champ créé en M par les charges situées sur dS et $\vec{E}_2$ le champ créé en M par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur. Soient $\vec{E}_1'$ et $\vec{E}_2'$ les champs respectifs en M'.



On a alors les trois propriétés suivantes

1. $\vec{E}_2(M) = \vec{E}_2(M')$ car M et M'sont infiniment proches.
2. $\vec{E}_2' = -\vec{E}_1'$ car le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul.
3. $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$ car $\vec{E}_1$ est symétrique par rapport à dS, considérée comme un plan puisque M et M' peuvent être infiniment rapprochés.

Grâce à ces trois propriétés, on en déduit que $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$, c'est à dire que la contribution de l'ensemble du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate. Comme

le champ total vaut $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ (théorème de Coulomb), on en déduit que le champ créé par l'ensemble du conducteur (à l'exclusion des charges situées en dS) au voisinage du point M est $\vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$.

Autrement dit, la force électrostatique $\vec{dF}$ subie par cette charge $dq = \sigma\, dS$ de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut

$$\vec{dF} = dq\,\vec{E_2} = \sigma\, dS \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}\, dS$$

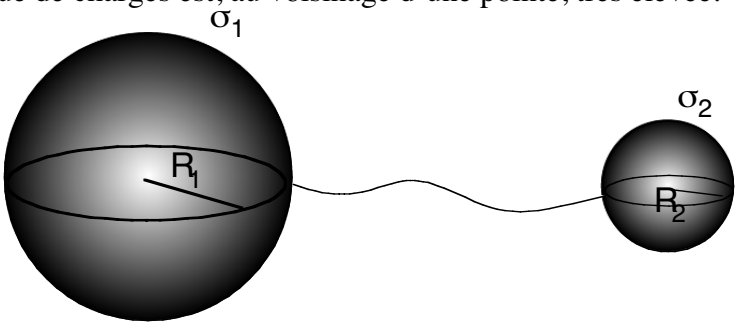
Quel que soit le signe de σ, la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface. Ainsi, la pression électrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut

$$\boxed{P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur. Mais elle peut déformer ou déplacer celui-ci, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent.

(e) Pouvoir des pointes

Cette expression décrit le fait expérimental que, à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est, au voisinage d'une pointe, très élevée.



On peut aborder ce phénomène avec deux sphères chargées de rayons différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V. Cela implique alors

$$V1 = V2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iint_{S_1}\frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iint_{S_2}\frac{\sigma_2 dS}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Donc, plus l'une des sphères aura un rayon petit et plus sa densité de charges sera élevée. Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure. A priori, cela semble en contradiction avec l'idée naïve que les charges non compensées ont tendance à se repousser mutuellement. Le résultat ci-dessus nous montre l'effet d'une pointe (accumulation

de charges), mais ne nous offre aucune explication de ce phénomène. Qu'est ce qui, physiquement, a permis une « accumulation » de charges sur une pointe ?
Prenons une sphère chargée placée seule dans l'espace. Se repoussant mutuellement, les charges vont produire une distribution surfacique uniforme. Maintenant, si l'on fait un creux (zone concave), les charges situées au fond du creux « voient » non seulement le champ électrostatique créé par les charges immédiatement voisines, mais également celui créé par les charges situées sur les bords du creux. Ainsi, au fond du creux, le champ total est plus fort et repousse les charges vers l'extérieur, vidant ainsi le creux de charges. Faisons maintenant une pointe (zone convexe). Là, le phénomène contraire se produit. Quand une charge se retrouve, sous l'effet répulsif des autres charges, repoussée vers la pointe, le champ qu'elle-même crée devient moins important (puisqu'elle est éloignée des autres charges) vis-à-vis des charges restées sur la partie uniforme de la sphère. Cela permet ainsi à une autre charge de prendre sa place : cette nouvelle charge se déplace donc et se retrouve elle-même repoussée sur la pointe. Le conducteur atteint l'équilibre électrostatique lorsque le champ répulsif créé par toutes les charges accumulées au niveau de la pointe compense celui créé par le charges restées sur le « corps » du conducteur.

III.1.3- Capacité d'un conducteur isolé

Nous avons vu qu'il était possible de faire une analogie entre la température d'un corps et le potentiel électrostatique. Or, pour une quantité de chaleur donnée, la température d'un corps dépend en fait de sa capacité calorifique. Il en va de même pour le potentiel électrostatique : il dépend de la capacité du corps à « absorber » les charges électriques qu'il reçoit. On peut donc suivre cette analogie et définir une nouvelle notion, la capacité électrostatique :

Capacité électrostatique ⇔ Capacité calorifique

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ et porté au potentiel V. Celui-ci s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \iint_{surface} \frac{\sigma(P)\,dS}{PM}$$

en tout point M du conducteur, le point P étant un point quelconque de sa surface. Par ailleurs, la charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit

$$Q = \iint_{\text{Surface}} \sigma \, dS$$

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant a, on obtient une nouvelle charge totale Q'=aQ et un nouveau potentiel V'=aV. On a ainsi un nouvel état d'équilibre électrostatique, parfaitement défini. On voit donc que, quoi qu'on fasse, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par Q et V) est tel que le rapport Q/V reste constant (cela résulte de la linéarité de Q et V en fonction de σ).

Définition : *La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par*

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V. L'unité de la capacité est le Farad (symbole F).

Remarques :

1. La capacité C d'un conducteur est une grandeur toujours <u>positive</u>. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.
2. Les unités couramment utilisées en électrocinétique sont le nF ou pF.
3. Exemple : capacité d'une sphère de rayon R, chargée avec une densité surfacique σ.

$$V = V(O) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \iint_{surface} \frac{\sigma(P)\,dS}{OP} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \iint_{surface} \frac{\sigma\,dS}{R} = \frac{\iint \sigma\,dS}{4\pi\,\varepsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\,\varepsilon_0 R$$

III.1.4- Superposition des états d'équilibre

Nous avons vu qu'un conducteur isolé, à l'équilibre électrostatique, est caractérisé par sa charge Q et son potentiel V, qui sont reliés entre eux par la capacité C du conducteur. Inversement , étant donné un conducteur de capacité C, la donnée de sa distribution surfacique σ détermine complètement son état d'équilibre, puisque $Q = \iint_{\text{Surface}} \sigma\, dS$ et V=Q/C.

Soit maintenant un autre état d'équilibre du même conducteur défini par une densité surfacique σ'. Le conducteur porte alors une charge Q' et a un potentiel V'. Du fait de la linéarité de Q et V avec σ, toute combinaison linéaire de σ et σ' est encore un état d'équilibre :

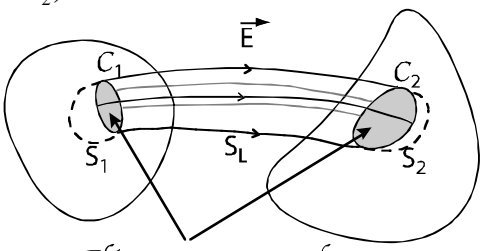
$$\sigma'' = a\sigma + b\sigma' \Leftrightarrow \begin{cases} Q'' = aQ + bQ' \\ V'' = \dfrac{Q''}{C} = aV + bV' \end{cases}$$

On a donc ici un résultat qui nous sera utile plus tard : ***toute superposition d'états d'équilibre (d'un conducteur ou d'un ensemble de conducteurs) est également un état d'équilibre.***

III.2- Systèmes de conducteurs en équilibre

III.2.1- Théorème des éléments correspondants

Soit deux conducteurs (A1) et (A2), placés l'un à coté de l'autre et portant des densités surfaciques σ_1 et σ_2 à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (A1) à (A2). Soit un petit contour fermé C_1 situé sur la surface de (A1) tel que l'ensemble des lignes de champ issues de (A1) et s'appuyant sur C_1 rejoignent (A2) (et y dessinent un contour fermé C_2).



Eléments correspondants

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle un tube de flux : le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale S_L dessinée par ce tube est nul par construction ($\vec{E}\cdot\vec{dS}=0$). Soit une surface fermée produite $S = S_L + S_1 + S_2$ où S_1 est une surface qui s'appuie sur C_1 et plonge à l'intérieur de (A1) et S_2 une surface similaire pour (A2).
En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_L} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$$

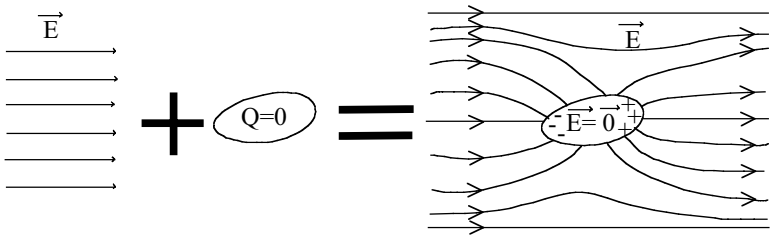
$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

où Q_1 est la charge totale contenue sur la surface de (A1) embrassée par C_1 tandis que Q_2 est la charge contenue sur la surface correspondante de (A2). Du coup $Q_1 = -Q_2$ nécessairement.

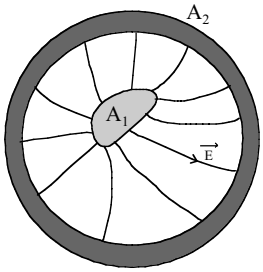
Théorème : *les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont opposées.*

III.2.2- Phénomène d'influence électrostatique

Jusqu'à présent nous n'avons abordé que les conducteurs chargés, isolés dans l'espace. Que se passe-t-il lorsque, par exemple, on place un conducteur neutre dans un champ électrostatique uniforme ? Etant neutre, sa charge $Q = \iint_{\text{Surface}} \sigma \, dS$ doit rester nulle. Mais étant un conducteur, les charges sont libres de se déplacer : on va donc assister à un déplacement de charges positives dans la direction de $\vec{E}$ et de charges négatives dans la direction opposée. On obtient alors une **polarisation** du conducteur (création de pôles + et -), se traduisant par une distribution surfacique σ non-uniforme (mais telle que Q=0).



Considérons maintenant le cas plus compliqué d'un conducteur (A1) de charge Q_1 avec une densité surfacique σ_1, placé à proximité d'un conducteur neutre (A2). En vertu de ce qui a été dit précédemment, on voit apparaître une densité surfacique σ_2 non-uniforme sur (A2) due au champ électrostatique de (A1). Mais, en retour, la présence de charges σ_2 situées à proximité de (A1) modifie la distribution de charges σ_1 ! A l'équilibre électrostatique, les deux distributions de charges σ_1 et σ_2 dépendent l'une de l'autre. On appelle cette action réciproque, l'**influence électrostatique**. Dans cet exemple, l'influence est dite **partielle**, car l'ensemble des lignes de champ électrostatique issues de (A1) n'aboutissent pas sur (A2). Soit q_2 la charge portée par la région de (A2) reliée à (A1). En vertu du théorème des éléments correspondants, on a $|q_2| < |Q_1|$.



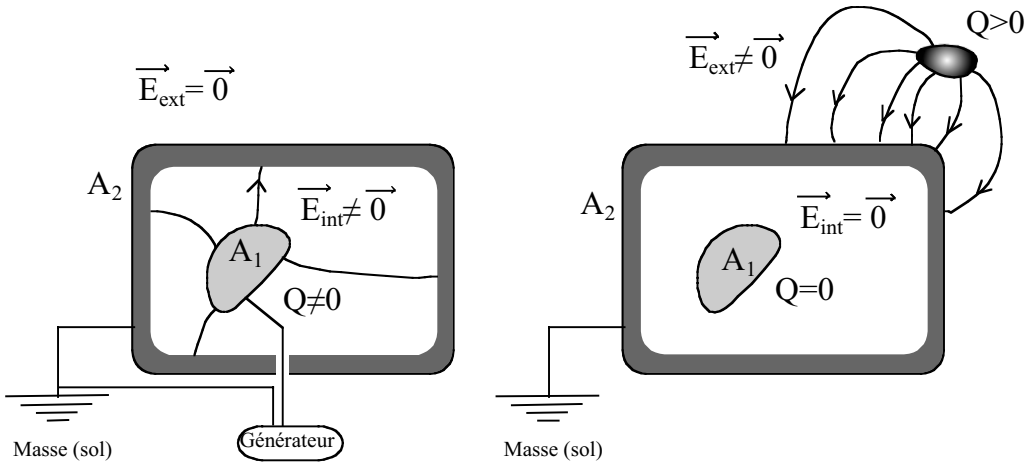
On peut créer des conditions d'**influence électrostatique totale** en plaçant (A1) à l'intérieur de (A2). Puisque l'ensemble des lignes de champ issues de (A1) aboutit sur (A2), on voit apparaître la charge $Q_2^{\text{int}} = -Q_1$ sur la face correspondante interne de (A2), et ceci

quelle que soit la position de (A1). Cette propriété (démontrée à partir du théorème des éléments correspondants) est connue sous le nom de théorème de Faraday. La charge électrique totale sur (A2) est simplement $Q_2 = Q_2^{\text{int}} + Q_2^{ext} = -Q_1 + Q_2^{ext}$.

Notion d'écran ou de blindage électrostatique : la cage de Faraday

Un conducteur à l'équilibre a un champ nul : de ce fait, s'il possède une cavité, celle-ci se trouve automatiquement isolée (du point de vue électrostatique) du monde extérieur. On définit par écran électrostatique parfait tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant.

Lorsqu'on relie (A2) au sol, on a $Q_2^{ext} = 0$ (les charges s'écoulent vers la Terre ou proviennent de celle-ci). Dans ce cas, le champ électrostatique mesuré à l'extérieur de (A2) est nul, malgré la présence de (A1) chargé à l'intérieur de (A2). Ainsi, l'espace extérieur à (A2) est protégé de toute influence électrostatique provenant de la cavité. L'inverse est également vrai.



Prenons maintenant le cas où (A1) porte une charge nulle et où (A2) est placé à proximité d'autres conducteurs chargés. A l'équilibre, on aura $Q_2^{\text{int}} = 0$ mais un champ électrostatique non nul mesuré à l'extérieur de (A2), dépendant de la distribution surfacique externe de (A2). Ainsi, malgré la charge portée par la surface extérieure de (A2), la cavité interne possède un champ électrostatique nul. Nous voyons donc que le champ électrostatique régnant à l'intérieur de (A2) est parfaitement indépendant de celui à l'extérieur. Noter que ceci reste vrai même si (A2) n'est pas maintenu à potentiel constant.

Une combinaison linéaire de ces deux situations permettant de décrire tous les cas possibles, nous venons de démontrer que tout conducteur creux maintenu à potentiel constant constitue bien un écran électrostatique dans les deux sens. Un tel dispositif est appelé *cage de Faraday*.

Alors que la *distribution* des charges Q_2^{int} dépend de la position de (A1), celle des charges Q_2^{ext} portées par la surface externe de (A2) dépend, elle, uniquement de ce qui se passe à l'extérieur.

Applications :

1. Protection contre la foudre : un paratonnerre est en général complété par un réseau de câbles entourant l'édifice à protéger, reliés à la Terre.
2. Tout conducteur transportant un courant faible est entouré d'une gaine métallique (appelée blindage) reliée au sol. Cette gaine est parfois simplement le châssis de l'appareil.

III.2.3- Coefficients d'influence électrostatique

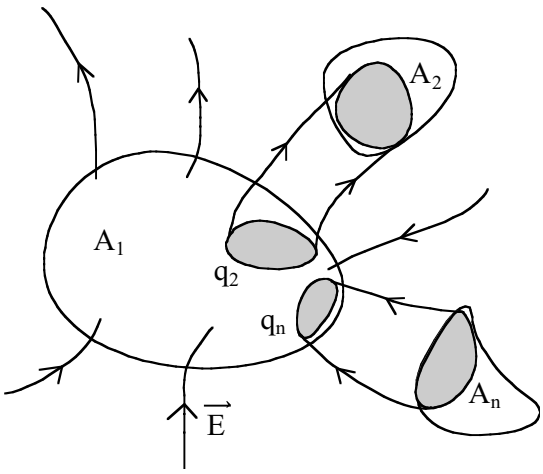
Nous avons vu que lorsque plusieurs conducteurs sont mis en présence les uns des autres, ils exercent une influence électrostatique réciproque. A l'équilibre (mécanique et électrostatique), les densités surfaciques de chaque conducteur dépendent des charges qu'ils portent, de leur capacité et de leurs positions relatives. Si l'on cherche à calculer, par exemple, le potentiel pris par l'un des conducteurs, alors il nous faut résoudre le problème complet : calculer les potentiels de tous les conducteurs.
Soit un ensemble de n conducteurs (Ai) de charge électrique totale Q_i et potentiel V_i, en équilibre électrostatique. Prenons (A1) et appliquons la notion vue précédemment de superposition des états d'équilibre. On peut toujours décomposer la distribution surfacique sur (A1) de la forme $\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{1j}$ où σ_{11} est la densité surfacique de charges apparaissant sur (A1) si tous les autres conducteurs étaient portés au potentiel nul (mais <u>présents</u>) et σ_{1j} celle apparaissant lorsque tous (y compris A1) sont portés au potentiel nul, sauf (Aj). On peut alors écrire que la charge totale sur (A1) est

$$Q_1 = \iint_{S_1} \sigma_1 dS = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_1} \sigma_{1j} dS = q_{11} + q_{12} + ... + q_{1n}$$

Pour connaître Q_1 il faut donc connaître les n états d'équilibre électrostatique. Considérons le premier, celui où tous les autres conducteurs en présence sont mis au potentiel nul. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} q_{11} &= C_{11}V_1 \\ q_{21} &= C_{21}V_1 \\ \vdots &= \vdots \\ q_{n1} &= C_{n1}V_1 \end{aligned}$$

En effet, la charge apparaissant sur (A1) ne peut être due qu'à V_1, C_{11} étant la capacité du conducteur (A1) <u>en présence des autres conducteurs</u>. Mais par influence, une distribution σ_{j1} apparaît sur tous les autres conducteurs (Aj). Celle-ci dépend du nombre de lignes de champ qui joignent (A1) à chaque conducteur (Aj). En vertu du théorème des éléments correspondants, la charge qui « apparaît » est de signe opposé à celle sur (A1), elle-même proportionnelle à q_{11} donc à V_1 : <u>les coefficients d'influence C_{j1} sont donc négatifs</u>.



Considérons maintenant le deuxième état d'équilibre, où tous les conducteurs sauf (A2) sont mis au potentiel nul. On a alors dans ce cas

$$\begin{aligned} q_{12} &= C_{12}V_2 \\ q_{22} &= C_{22}V_2 \\ \vdots &= \vdots \\ q_{n2} &= C_{n2}V_2 \end{aligned}$$

Bien évidemment, en reproduisant cette opération, on obtient que l'état d'équilibre le plus général est décrit par

$$Q_i = q_{i1} + q_{i2} + \ldots + q_{in} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_i$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

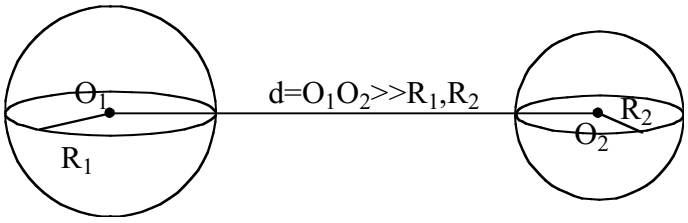
Les coefficients C_{ij} sont appelés coefficients d'influence. Les coefficients C_{ii} sont parfois appelés coefficients de capacité ou capacités des conducteurs en présence des autres. Il ne faut pas les confondre avec les capacités propres C_i des conducteurs isolés, seuls dans l'espace. D'une façon générale, on a la propriétés suivantes :

1. Les C_{ii} sont toujours positifs.
2. Les C_{ij} sont toujours négatifs et $\boxed{C_{ij} = C_{ji}}$ (matrice symétrique).
3. $\boxed{C_{ii} \geq -\sum_{j \neq i} C_{ji}}$, l'égalité n'étant possible que dans le cas d'une influence totale.

La dernière inégalité est une conséquence du théorème des éléments correspondants. En effet, prenons le conducteur (A1) porté au potentiel V_1 alors que les autres sont mis au potentiel nul. Tous les tubes de flux partant de (A1) n'aboutissent pas nécessairement à un autre conducteur (ils ne le feraient que pour une influence totale). Donc, cela signifie que la charge totale située sur (A1) est (en valeur absolue) supérieure à l'ensemble des charges situées sur les autres conducteurs, c'est à dire $Q_1 = C_{11}V_1 \geq |q_{21}| + \ldots + |q_{n1}| = \sum_{j \neq 1} |C_{j1}| V_1$.

Exemple

Soient deux conducteurs sphériques, (A1) et (A2), de rayons R_1 et R_2 portant une charge Q_1 et Q_2, situés à une distance d l'un de l'autre. A quels potentiels se trouvent ces deux conducteurs ?



En vertu du principe de superposition, le potentiel de (A1), pris en son centre O est

$$V_1(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{P_1O} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS_2}{P_2O}$$

où le premier terme est dû aux charges Q_1 et le second à celles situées sur (A2). Lorsque la distance d est beaucoup plus grande que les rayons, on peut assimiler $P_2O \approx O'O = d$ pour tout point P_2 de la surface de (A2) et l'on obtient

$$V_1(O) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_d}$$

où l'on reconnaît en C_1 la capacité d'une sphère isolée et en C_d un coefficient qui dépend à la fois de la géométrie des deux conducteurs et de leur distance. En faisant de même pour (A2), on obtient

$$V_2(O') = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_d}$$

où C_2 est la capacité de (A2) isolée. On obtient donc un problème linéaire qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_d} \\ \frac{1}{C_d} & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $V_i = D_{ij} Q_j$ où la matrice D_{ij} est connue à partir de l'inverse des diverses capacités. Si l'on veut se ramener au problème précédent (calcul des charges connaissant les potentiels), c'est à dire à la résolution de $Q_i = C_{ij} V_j$, où C_{ij} est la matrice des coefficients d'influence, il faut inverser la matrice D_{ij}. On obtiendra en effet $Q_i = D^{-1}{}_{ij} V_j$, ce qui donne $C_{ij} = D^{-1}{}_{ij}$. Dans le cas présent, on obtient

$$C_{11} = \frac{C_1}{1 - \frac{C_1 C_2}{C_d^{\,2}}} \qquad C_{22} = \frac{C_2}{1 - \frac{C_1 C_2}{C_d^{\,2}}} \qquad C_{12} = C_{21} = -\frac{\frac{C_1 C_2}{C_d}}{1 - \frac{C_1 C_2}{C_d^{\,2}}}$$

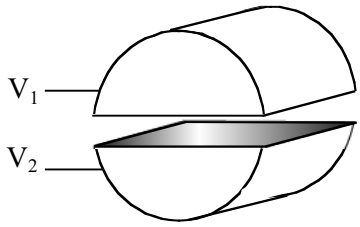
On voit clairement sur cet exemple (1) que les capacités en présence des autres conducteurs C_{ii} ne sont pas identifiables aux capacités propres C_i des conducteurs isolés dans l'espace et (2) les coefficients d'influence C_{ij} sont bien négatifs.

III.3- Le condensateur

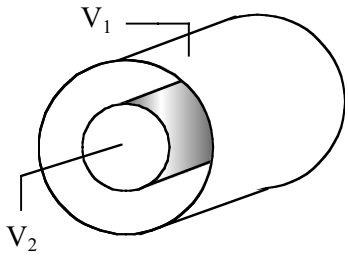
III.3.1- Condensation de l'électricité

Définition : *On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique. Il y a deux sortes de condensateurs :*

- *à armatures rapprochées*
- *à influence totale*



Armatures rapprochées



Influence totale

En général, les deux armatures sont séparées par un matériau isolant (un diélectrique), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur. Dans ce qui suit on suppose qu'il n'y a que

du vide. Soient donc deux conducteurs (A1) et (A2) portant une charge totale Q_1 et Q_2 et de potentiels V_1 et V_2. D'après la section précédente, on a

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

Les coefficients C_{ij} étant indépendants des valeurs de Q et de V, il suffit, pour les trouver, de considérer des cas particuliers simples (formellement on a ici 2 équations à 4 inconnues).

Regardons ce qui se passe dans le cas d'un condensateur à influence totale, c'est à dire un condensateur pour lequel on a

$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^{\text{int}} = Q_2^{ext} - Q_1$$

Si on relie (A2) à la masse ($V_2 = 0$, $Q_2^{ext} = 0$ car on néglige toute influence extérieure), alors on obtient

$$\begin{cases} Q_1 = -Q_2 \\ C_{11} = -C_{21} \end{cases}$$

La première relation n'est vraie que si (A2) est à la masse, mais la seconde est générale. Par ailleurs, on sait que $C_{12} = C_{21}$ (on peut aussi le redémontrer en reliant les deux conducteurs par un fil ($V_1 = V_2$) et choisir $Q_1 = 0$). Par convention, la capacité C du condensateur, sa charge Q et sa tension entre armatures sont alors définies de la façon suivante,

$$C = C_{11}$$

$$U = V_1 - V_2$$

$$Q = Q_1$$

ce qui fournit la relation des condensateurs

$$\boxed{Q = CU}$$

Remarques

1. Pourquoi appelle-t-on ces dispositifs des condensateurs ? Parce qu'ils permettent de mettre en évidence le phénomène de « condensation de l'électricité », à savoir l'accumulation de charges électriques dans une petite zone de l'espace. Ainsi, en construisant des condensateurs de capacité C élevée, on obtient des charges électriques Q élevées avec des tensions U faibles.
2. La charge située sur l'armature (A2) est $Q_2 = Q_2^{ext} - Q$ (pour un condensateur à influence totale) et, en toute rigueur, ne vaut –Q que lorsque (A2) est mise à la masse. En général, elle reste cependant négligeable devant Q dans les cas considérés dans ce cours et on n'en tiendra donc pas compte.

Pour un condensateur à armatures rapprochées, on obtient le même résultat, moyennant une séparation faible (devant leur taille) des conducteurs. Dans ce type de condensateur, les charges Q_1 et Q_2 correspondent à celles qui se trouvent réparties sur l'ensemble de la surface de chaque conducteur. Mais si la distance est faible, l'influence électrostatique va condenser les charges sur les surfaces en regard, de telle sorte que l'on peut faire l'hypothèse suivante

$$Q_1 = Q_1^{ext} + Q_1^S \approx Q_1^S$$

$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^S = Q_2^{ext} - Q_1^S \approx Q_2^{ext} - Q_1$$

ce qui nous ramène à une expression identique à celle d'un condensateur à influence totale.

III.3.2- Capacités de quelques condensateurs simples

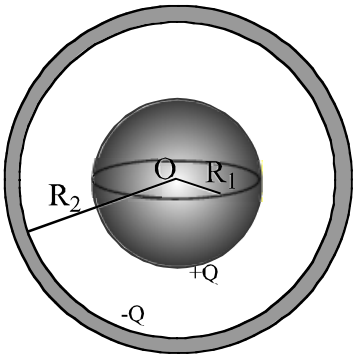
Dans ce qui suit, nous allons voir plusieurs exemples de calculs de capacités. Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension U, c'est à dire

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{C}$$

Autrement dit, il faut être capable de calculer la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures ainsi que la charge Q.

(a) Condensateur sphérique

Soit un condensateur constitué de deux armatures sphériques de même centre O, de rayons respectifs R_1 et R_2, séparées par un vide ($R_2 > R_1$). D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point M situé à un rayon r entre les deux armatures vaut



$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

en coordonnées sphériques, ce qui donne une tension

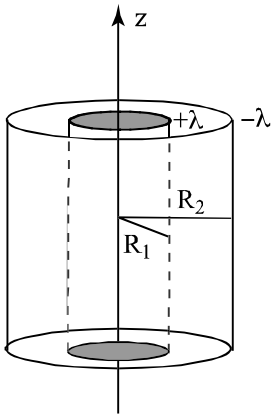
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

et fournit donc une capacité totale

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

(b) Condensateur cylindrique

Soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de longueur infinie, de rayons R_1 et R_2, séparées par un vide ($R_2 > R_1$). Soit λ la charge par unité de longueur du cylindre intérieur. D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique entre les deux armatures s'écrit



$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\vec{u_\rho}$$

en coordonnées cylindriques, ce qui donne une tension

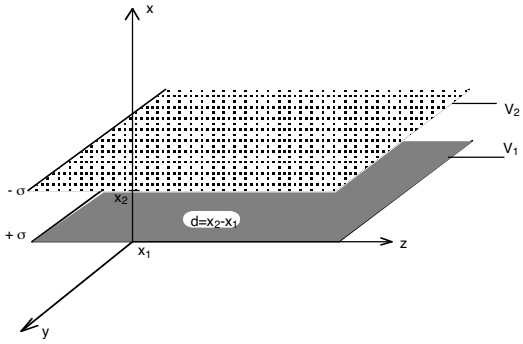
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{d\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

et une capacité <u>par unité de longueur</u>

$$\boxed{C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

(c) Condensateur plan

Soient deux armatures (A1) et (A2) planes parallèles infinies, orthogonales à un même axe Ox de vecteur unitaire $\vec{i}$ et situées à une distance $d = x_2 - x_1$ l'une de l'autre. L'armature (A1) porte une densité surfacique de charges σ et (A2), en vertu du théorème des éléments correspondants, porte une densité $-\sigma$. Entre les deux armatures, le champ électrostatique est la superposition des champs créés par ces deux plans infinis, c'est à dire



$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors

$$U = V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E}\cdot\vec{dx} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

d'où une capacité par unité de surface

$$\boxed{C = \frac{\sigma}{U} = \frac{\varepsilon_0}{d}}$$

La valeur numérique de la permittivité ε_0 a été mesurée grâce à un condensateur plan.

III.3.3- Associations de condensateurs

(a) Condensateurs en parallèle

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en parallèle avec la même tension $U = V_1 - V_2$. La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par $Q_i = C_i U$. La charge électrique totale est simplement

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \left(\sum_{i=1}^{n} C_i\right) U$$

ce qui correspond à une capacité équivalente $\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i}$ qui est la somme des capacités individuelles.

(b) Condensateurs en série

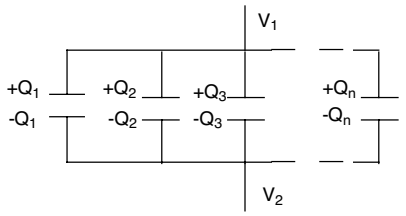
Soient n condensateurs de capacités C_i mis en série les uns derrière les autres. On porte aux potentiels V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne et on apporte la charge Q sur le premier condensateur. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge ±Q (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La tension totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit alors simplement

$$U = V_0 - V_n = \left(V_0 - V_1\right) + \left(V_1 - V_2\right) + \cdots + \left(V_{n-1} - V_n\right)$$

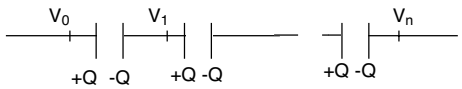
$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\right) Q$$

et correspond à celle d'une capacité unique C de capacité équivalente

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$



Condensateurs en parallèle



Condensateurs en série

Chapitre IV- Energie et actions électrostatiques

IV.1- Energie potentielle électrostatique

IV.1.1- Energie électrostatique d'une charge ponctuelle

Comment mesure-t-on l'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de masse m ? On le déplace d'une position initiale jusqu'à une position finale (on exerce donc une force) puis on le lâche sans vitesse initiale. S'il acquiert une vitesse, c'est qu'il développe de l'énergie cinétique. Or, en vertu du principe de conservation de l'énergie, cette énergie ne peut provenir que d'un autre réservoir énergétique, appelé énergie potentielle. Comment s'est constituée cette énergie potentielle gravitationnelle ? Grâce au déplacement du corps par l'opérateur. Ainsi, le travail effectué par celui-ci est une mesure directe de l'énergie potentielle. On va suivre le même raisonnement pour l'énergie électrostatique.

Définition : *l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.*

Prenons une particule de charge q placée dans un champ $\vec{E}$. Pour la déplacer de l'infini vers un point M, un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement est fait suffisamment lentement, la particule n'acquiert aucune énergie cinétique. Cela n'est possible que si, à tout instant, $\overrightarrow{F_{ext}} = -\vec{F} = -q\vec{E}$. Le travail fourni par l'opérateur sera donc

$$W(M) = \int_{\infty}^{M} dW = \int_{\infty}^{M} \overrightarrow{F_{ext}} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{\infty}^{M} q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = q\left[V(M) - V(\infty)\right]$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M

$$\boxed{W_e = qV}$$

On voit donc que le potentiel électrostatique est une mesure (à un facteur q près) de l'énergie électrostatique : c'est dû au fait que V est lié à la circulation du champ. Autre remarque importante : l'énergie est indépendante du chemin suivi.

IV.1.2- Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles

Dans la section précédente, nous avons considéré une charge q placée dans un champ $\vec{E}$ extérieur et nous avons ainsi négligé le champ créé par la charge elle-même. Mais lorsqu'on a affaire à un ensemble de N charges ponctuelles q_i, chacune d'entre elles va créer sur les autres un champ électrostatique et ainsi mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique. Quel sera alors l'énergie potentielle électrostatique de cet ensemble de charges ?

Soit la charge ponctuelle q_1 placée en P_1. On amène alors une charge q_2 de l'infini jusqu'en P_2, c'est à dire que l'on fournit un travail $W_2 = q_2 V_1(\mathrm{P}_2) = q_1 V_2(\mathrm{P}_1) = W_1$ identique à celui qu'il

aurait fallu fournir pour amener q_1 de l'infini en P_1 en présence de q_2 déjà située en P_2. Cela signifie que ce système constitué de 2 charges possède une énergie électrostatique

$$W_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\,\varepsilon_0 r_{12}} = W_1 = W_2 = \frac{1}{2}\left(W_1 + W_2\right)$$

où $r_{12} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$.

Remarque : Dans cette approche, nous avons considéré q_2 immobile alors que l'on rapprochait q_1. En pratique évidemment, c'est la distance entre les deux charges qui diminue du fait de l'action de l'opérateur extérieur à la fois sur q_1 et q_2 (avec $\overrightarrow{F_{ext/1}} = -\overrightarrow{F_{ext/2}}$ puisque $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$). On aurait aussi bien pu calculer le travail total fourni par l'opérateur en évaluant le déplacement de q_1 et de q_2 de l'infini à la distance intermédiaire (« M/2 »). Une autre façon de comprendre cela, c'est de réaliser que nous avons évalué le travail fourni par l'opérateur dans le référentiel lié à q_2 (immobile). Celui-ci est identique au travail évalué dans un référentiel fixe (où q_1 et q_2 se déplacent) car le déplacement des charges s'effectue de manière quasi-statique (aucune énergie n'a été communiquée au centre de masse).

Si maintenant on amène une 3ème charge q_3 de l'infini jusqu'en P_3 (q_1 et q_2 fixes), il faut fournir un travail supplémentaire

$$W_3 = q_3 V_{1+2}(\mathrm{P}_3) = q_3\left(V_1(\mathrm{P}_3) + V_2(\mathrm{P}_3)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}}\right)$$

correspondant à une énergie électrostatique de ce système de 3 charges

$$W_e = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}}\right)$$

Ainsi, on voit qu'à chaque <u>couple</u> $q_i\,q_j$ est associée une énergie potentielle d'interaction. Pour un système de N charges on aura alors

$$W_e = \sum_{couples} q_i V_j = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

où le facteur 1/2 apparaît parce que chaque couple est compté deux fois. L'énergie électrostatique d'un ensemble de N charges ponctuelles est donc

$$\boxed{\begin{array}{l} W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} q_i V_i(\mathrm{P}_i) \\ \text{où } \; V_i(\mathrm{P}_i) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}} \end{array}}$$

est le potentiel créé en P_i par toutes <u>les autres</u> charges.

Pour une distribution continue de charges, la généralisation de la formule précédente est évidente. Soit dq la charge située autour d'un point P quelconque de la distribution. L'énergie électrostatique de cette distribution s'écrit

$$\boxed{\begin{array}{l} W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{distribution} dq V(\mathrm{P}) \\ \text{où } \; V(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\displaystyle\int_{distribution}\frac{dq(P')}{PP'} \end{array}}$$

est le potentiel créé par toute la distribution. En effet ici, il n'est pas nécessaire d'exclure explicitement la charge située en P puisque dq(P) peut tendre vers zéro avec l'élément infinitésimal (contribution nulle à l'intégrale, absence de divergence).

IV.1.3- Energie électrostatique d'un conducteur en équilibre

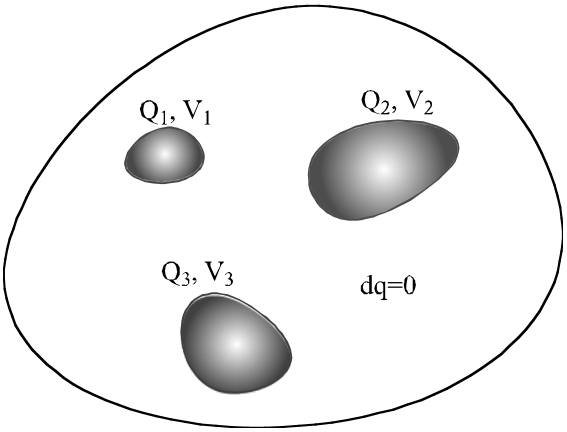
Soit un conducteur isolé, de charge Q distribuée sur sa surface S. L'énergie potentielle électrostatique de ce conducteur est alors

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S dqV(\mathrm{P}) = \frac{V}{2}\int_S dq = \frac{QV}{2}$$

puisqu'il est équipotentiel, c'est à dire

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Ceci est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité C au potentiel V. Puisque cette énergie est toujours positive cela signifie que, quel que soit V (et donc sa charge Q), cela coûte toujours de l'énergie.



Soit un ensemble de N conducteurs chargés placés dans un volume V. A l'équilibre, ils ont une charge Q_i et un potentiel V_i. En dehors du volume occupé par chaque conducteur, il n'y a pas de charge donc dq=0. L'énergie électrostatique de cette distribution de charges est alors simplement

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V dqV(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} dq_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} V_i \int_{S_i} dq_i$$

c'est à dire

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i}$$

IV.1.4- Quelques exemples

Exemple 1 : Le condensateur

Soit un condensateur constitué de deux armatures. L'énergie électrostatique de ce système de deux conducteurs est

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2\right) = \frac{1}{2}Q\left(V_1 - V_2\right) = \frac{1}{2}QU$$

c'est à dire

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Ainsi donc, un condensateur peut emmagasiner de l'énergie électrostatique. Mais où est-elle stockée ? Sous quelle forme ?
Prenons le cas d'un condensateur plan de densité surfacique σ uniforme et dont les armatures, séparées d'une distance d, ont une surface S commune. L'énergie de ce condensateur s'écrit

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 (Sd) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\mathcal{V}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume compris entre les deux armatures, où réside le champ E. On voit donc sur cet exemple que l'énergie du condensateur est stockée dans le champ lui-même.

Exemple 2 : Le dipôle

Soit un dipôle électrostatique placé dans un champ électrostatique $\overrightarrow{E_{ext}}$ On s'intéresse à l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre ce dipôle et le champ et non pas à celle qui existe entre la charge +q et –q du dipôle lui-même. On considère donc le dipôle comme un système de deux charges, -q placée en un point A et +q en B, <u>n'interagissant pas entre elles</u>. L'énergie électrostatique de ce système de charges est simplement

$$W_e = -qV_{ext}(A) + qV_{ext}(B) = -q\int_A^B \overrightarrow{E_{ext}} \cdot \overrightarrow{dr} \approx -q\,\overrightarrow{E_{ext}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

ce qui donne

$$\boxed{W_e = -\vec{p} \cdot \overrightarrow{E_{ext}}}$$

où $\vec{p} = q\,\overrightarrow{AB}$ est le moment dipolaire électrique.

Remarque : L'énergie électrostatique entre la charge +q et –q du dipôle lui-même est $W_e = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 AB} = \vec{p} \cdot \overrightarrow{E(B)}$. Si le champ extérieur est bien supérieur au champ créé par la charge –q en B, alors cela signifie que le dipôle est profondément modifié (voire brisé) par le champ : l'énergie d'interaction est supérieure à l'énergie interne de liaison. Cependant, la distance AB étant en général très petite, cela ne se produit pas et le dipôle se comporte comme un système lié, sans modification de son énergie interne (ceci n'est pas tout à fait exact : un champ extérieur peut faire osciller les deux charges autour de leur position d'équilibre, induisant ainsi une variation de leur énergie de liaison).

Exemple 3 : Un conducteur chargé placé dans un champ extérieur

Soit un conducteur portant une charge Q et mis au potentiel V en l'absence de champ extérieur. Il possède donc une énergie électrostatique interne $W_{e,\text{int}} = \frac{QV}{2}$, correspondant à l'énergie qu'il a fallu fournir pour déposer les Q charges au potentiel V sur le conducteur.
Si maintenant il existe un champ extérieur $\overrightarrow{E_{ext}}$, alors le conducteur prend un nouveau potentiel V' et son énergie peut s'écrire $W_e = \frac{QV'}{2}$. Comment calculer V' ?

La méthode directe consiste à prendre en compte la polarisation du conducteur sous l'effet du champ extérieur et calculer ainsi la nouvelle distribution surfacique σ (avec $Q = \iint_S \sigma dS$).

Une autre méthode consiste à considérer la conservation de l'énergie : en plaçant le conducteur dans un champ extérieur, on lui fournit une énergie potentielle d'interaction électrostatique qui s'ajoute à son énergie électrostatique « interne ». Supposons (pour simplifier) que le champ extérieur $\overrightarrow{E_{ext}}$ est constant à l'échelle du conducteur. Alors ce dernier se comporte comme une charge ponctuelle placée dans un champ et possède donc une énergie potentielle d'interaction électrostatique $W_{e,ext} = QV_{ext}$. L'énergie électrostatique totale sera alors

$$W_e = QV_{ext} + \frac{QV}{2} \quad \text{c'est à dire} \quad V' = V + 2V_{ext}$$

IV.2- Actions électrostatiques sur un conducteur en équilibre

IV.2.1- Notions de mécanique du solide

a) Calcul direct des actions (force et moment d'une force)

Un conducteur étant un solide, il faut faire appel à la mécanique du solide. Tout d'abord, on choisit un point de référence O, des axes et un système de coordonnées respectant le plus possible la symétrie du solide. La force et le moment de cette force par rapport au point O sont alors

$$\vec{F} = \int_{solide} \overrightarrow{dF}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_O} = \int_{solide} \overrightarrow{d\Gamma_O} = \int_{solide} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF}$$

où $\overrightarrow{dF}$ est la force s'exerçant sur un élément infinitésimal centré autour d'un point P quelconque du solide et où l'intégrale porte sur tous les points du solide. Le formalisme de la mécanique du solide considère ensuite que la force totale ou résultante $\vec{F}$ s'applique au barycentre G du solide.

b) Liens entre travail d'une action (force ou moment) et l'action elle-même

Lors d'une <u>translation pure</u> du solide, considéré comme indéformable, tout point P du solide subit une translation d'une quantité fixe : $\overrightarrow{dr} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{\varepsilon}$. La force totale responsable de ce déplacement doit fournir un travail

$$dW = \int_{solide} \overrightarrow{dF} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{solide} \overrightarrow{dF} \cdot \vec{\varepsilon} = \left(\int_{solide} \overrightarrow{dF} \right) \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} F_i dx_i$$

où $\vec{F}$ est la résultante de la force s'exerçant sur le solide et les x_i les coordonnées du centre de masse du solide.

Dans le cas de <u>rotations pures</u>, on ne s'intéresse qu'au moment des forces responsables de ces rotations. Celles-ci sont décrites par trois angles infinitésimaux $d\alpha_i$ autour de trois axes Δ_i, passant par le centre d'inertie G du solide et engendrés par les vecteurs unitaires $\vec{u_i}$. L'expression générale du moment d'une force (ou couple) par rapport à G est alors