Université Mohammed Premier

ENSAO

# Cours du module

# Algèbre 3

## Filière du cycle préparatoire

## 2ème année

### Année universitaire 2018-19

Pr. Omar ANANE

**Objectifs :**

- Réduire les matrices
- Etudier et résoudre les systèmes d'équation linéaires
- Etudier et résoudre des systèmes d'équation différentielles linéaires

**Prérequis:**

- Nombres réels et complexes;
- Algèbre de base: ensembles, relations, applications, …
- Structures algébriques: lois de composition, groupes, anneaux ,…
- Espaces vectoriels: sous espaces, systèmes libres, bases, dimension, …
- Applications linéaires : composition, image, noyau, rang, représentation matricielle,…

**Recommandations:**

- Se familiariser avec les logiciels de calcul scientifique (Scilab ou Matlab, …)
- Ecrire des programmes élémentaires sur les opérations matricielles (en C, C++, …)

# Programme du module

## Partie1: Réduction des matrices carrées

- Valeurs et vecteurs propres
- Polynôme caractéristique
- Réduction à la forme triangulaire
- Sous-espaces propres
- Diagonalisation
- Polynôme minimal d'endomorphisme
- Théorème de Cayley-Hamilton
- Sous espace caractéristique
- Endomorphismes nilpotents

## Partie2: Formes bilinéaires

- Dualité
- Orthogonalité
- Transposition
- Espaces Euclidiens, Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, projections orthogonales.
- Formes bilinéaires, formes quadratiques.

## Partie3: Application à la résolution des systèmes différentiels linéaires

- Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
- Résolution du système homogène (H) : $dY/dx = A\,Y$
  - Cas où A est diagonalisable. - Cas où A est trigonalisable.
- Résolution du système complet (L) : $dY/dx = A\,Y + B(x)$
- Exponentielle d'une matrice.
- Résolution du système différentiel (L) en utilisant l'exponentielle de matrice.

# Partie1:  Réduction des matrices carrées

0 . Rappels sur les matrices
1. Valeurs et vecteurs propres
2. Polynôme caractéristique
3. Réduction à la forme triangulaire
4. Sous-espaces propres
5. Diagonalisation
6. Polynôme minimal d’endomorphisme
7. Théorème de Cayley-Hamilton
8. Sous espace caractéristique
9. Endomorphismes nilpotents

- Les matrices sont largement utilisées dans différents domaines scientifiques, techniques, économiques et de gestion.

- Elles interviennent comme outil de modélisation, d'analyse et de résolution de problèmes.

- Les problèmes étudiés, notamment dans les sciences de l'ingénieur, font souvent intervenir des grandeurs multidimensionnelles. Par conséquent, le formalisme mathématiques par lequel ils sont modélisés fait intervenir des opérateurs matriciels.

- Aussi, les méthodes d'analyse numérique, qui approchent des problèmes complexes par des techniques de discrétisation ou de projection, font largement appel au formalisme matriciel.

- Ainsi, l'analyse et la résolution de ces problèmes font appel à l'arsenal matriciel, notamment les techniques de réduction des matrices.

# 0 . Rappels sur les matrices

## 1- Définitions et notations générales

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$,

Une matrice d'ordre (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une application A : $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ , où m et n sont deux entiers naturels non nuls. On note $a_{ij}$ = A(i,j) pour tout (i,j) $\in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ et on représente généralement la matrice A sous forme d'un tableau à m lignes et n colonnes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice A est simplement notée $A=(a_{ij})_{m,n}$ . L'ensembles des matrices d'ordre (m,n) est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Les colonnes $A^j$ $(1\leq j\leq n)$ et les lignes $A_i(1\leq i \leq m)$ sont dites respectivement vecteurs colonnes et vecteurs lignes de A.
On peut donc écrire $A=(A^j)_{(1\leq j\leq n)}$ ou $A=(A_i)_{(1\leq i \leq m)}$
Ainsi, une famille $(A^j)_{(1\leq i \leq n)}$ de vecteurs de $\mathbb{K}^m$ peur être représentée par la matrice $A =(A^j)_{(1\leq i \leq n}$ .
Tout vecteur de $\mathbb{K}^m$ peut être représenté par une matrice à une seule colonne et à m lignes. En particulier, tout scalaire de $\mathbb{K}$ peut être représenté par une matrice à une ligne et une colonne.
La transposée d'une matrice $A=(a_{ij})_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice ${}^tA=(a_{ji})_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$
La conjuguée d'une matrice $A =(a_{ij})_{m,n}$ est la matrice $\bar{A} =(\overline{a_{ij}})_{m,n}$

## 2 - Opérations sur les matrices

La somme de deux matrices $A =(a_{ij})_{m,n}$ et $B =(b_{ij})_{m,n}$ est la matrice $A+B= (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$
La multiplication d'une matrice $A =(a_{ij})_{m,n}$ par un scalaire α de $\mathbb{K}$ est la matrice $\alpha.A =(\alpha\, a_{ij})_{m,n}$
$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.
L'élément neutre $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ pour l'addition est la matrice nulle $O_{m,n}$ (tous ses termes $a_{ij}$ sont nuls)
Le produit A × B (noté simplement AB) de deux matrices $A =(a_{ij})_{m,n}$ et $B =(b_{jk})_{n,p}$ est la matrice $C =(c_{ik})_{m,p}$ définie par:
$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$
On a ${}^t(A\,B) = {}^tB \times {}^tA$

## 3 – Ecriture d'un système d'équations linéaires:

Un système de m équations linéaires à n inconnues scalaires de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = y_m \end{cases}$$

s'écrit sous la forme du produit matriciel AX=Y , ou encore :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

où $A = (a_{ij})_{m,n}$ , X est le vecteur colonne $(x_j)_n$ et Y le vecteur colonne $(y_i)_m$

## 4 - Représentation matricielle d'une application linéaire:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimensions respectives n et m. Etant données une base $B_E = (e_i)_{1\leq i \leq n}$ de E et une base $B_F = (f_i)_{1\leq i \leq m}$ de F, toute application linéaire u de E dans F ($u \in \mathcal{L}(E,F)$ ) est représentée par sa matrice $M_u = (a_{ij})_{m,n}$ où $a_{ij}$ est la composante du vecteur $u(e_i)$ selon le vecteur $f_j$ .
Autrement dit, $M_u = (A_i)_{(1\leq i \leq m)}$ où $A_i$ est le vecteur ligne formé par les composantes de $u(e_i)$ dans la base $B_F$.

L'application $u \rightarrow M_u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ , elle vérifie également $M_{vou} = M_v\, M_u$ pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ ($M_{vou} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ si G est un espace de dimension p )

Si X est le vecteur colonne (matrice à n lignes et une colonne) représentant le vecteur $x \in E$ dans la base $B_E$ , et Y est le vecteur colonne représentant le vecteur u(x) dans la base $B_F$, l'écriture matricielle de l'équation vectorielle y=u(x) est :

$$M_u X = Y$$

## 5 – Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A $\epsilon$ $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, noté rg(A), est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par la famille des vecteurs colonnes $(A^j)_{(1\leq j\leq n)}$. C'est aussi la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par la famille des vecteurs lignes $(A_i)_{(1\leq i\leq m)}$.

Il en résulte que $rg(A)\leq \min(m,n)$ et que $rg({}^tA)=rg(A)$

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

Si A est la matrice représentant une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ relativement aux bases $B_{E \text{ et }} B_F$ de E et F respectivement, alors rg(A)= rg(u) = dim (Im(u))

Le rang d'une matrice A $\epsilon$ $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ reste inchangé si on effectue sur A les opérations élémentaires suivantes:

- Echanger deux vecteurs colonnes $A^i$ et $A^j$ (opération désignée par $C_i \leftrightarrow C_j$ )
- Ajouter $\alpha A^i$ ($\alpha$ est un scalaire et $A^i$ vecteur colonne ) à un vecteur colonne $A^j$ pour $i\neq j$ ($C_j \longleftarrow C^j + \alpha C_i$)
- Multiplier un vecteur colonne $A^i$ par un scalaire $\alpha \neq 0$ ($C_i \longleftarrow \alpha C_i$)

Ces trois opérations restent valables si on les transpose sur les lignes de la matrice ($L_i \leftrightarrow L_j$ , $L_j \longleftarrow L^j + \alpha L_i$ , $L_i \longleftarrow \alpha L_i$)

## 6- Méthode du pivot de Gauss

Cette méthode consiste à calculer le rang d'une matrice $A=(a_{ij})_{m,n}$ $\epsilon$ $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de façon algorithmique:

- Si $A= O_{m,n}$ alors rg(A)=0
- Sinon il existe (i,j ) tel que $a_{ij} \neq 0$ , posons $p_1 = a_{ij}$ (pivot )
- Par des opérations $C_1 \leftrightarrow C_j$ et $L_1 \leftrightarrow L_i$ , le pivot $p_1$ devient le premier terme de la matrice
- On annule les coefficients en dessous de $p_1$ par des opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \frac{\alpha_i}{p_1} L_1$ (i>1)

$$\left(\begin{array}{c|c} p_1 & \star \\ \hline \alpha_2 & \\ \vdots & \star \\ \alpha_m & \end{array}\right)$$

On parvient alors à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} p_1 & \star \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

- On recommence ce processus avec la matrice B tant que la matrice obtenue est non nulle.
  A terme, on obtient la matrice du type
  où $p_1$ , $p_2$ , … , $p_r$ sont les pivots ($\neq 0$)
  et $O_{m-r,n-r}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m-r,n-r}(\mathbb{K})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & & \star & \\ & \ddots & & \star \\ 0 & & p_r & \\ \hline & \star & & O_{m-r,n-r} \end{array}\right)$$

On peut alors conclure que la matrice A est de rang r.

## 7- Matrices carrées

Une matrice est dite carrée si m=n, dans ce cas $\mathcal{M}_{m,n}$ ($\mathbb{K}$) est noté $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) et la matrice $=(a_{ij})_{n,n}$ est notée $=(a_{ij})_n$ .

D'après ce qui précède, $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Le produit de deux matrices est une loi de composition interne dans $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) .

($\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) , +, ×) est un anneau, de plus : $\alpha(A\,B)=(\alpha A)\,B= A(\alpha B)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ et $\forall$ A, B $\in \mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$)

L'élément neutre pour la multiplication est la matrice identité $I_n =(\delta_{ij})_n$ où $\delta_{ij} = 1$ si i=j , $\delta_{ij} = 0$ sinon.

On dit que deux matrices A et B commutent si AB=BA

### 7.1 – Puissances d'une matrice carrée:

Soit A$\in \mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) , la puissance de A est définie par : $A^0 = I_n$ et $A^k = AA^{k-1}$ $\forall$ k $\in \mathbb{N}^*$.

Soient A et B deux matrices carrées qui commutent et p $\in \mathbb{N}$, on a:

$$(AB)^p = A^pB^p \;,\; (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \;,\; A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k\, B^{p-k-1}$$

A est dite nilpotente s'il existe k $\in \mathbb{N}$ tel que $A^k = O_n$ ($O_n$ est la matrice nulle) ( si k=2 , A est dite idempotente)

### 7.2 - Matrices carrées particulières

Une matrice carrée A$\epsilon$ $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) est dite symétrique si ${}^tA = A$. A est dite antisymétrique ${}^tA = -A$. Autrement dit, une matrice $A=(a_{ij})_n$ est symétrique (resp. antisymétrique ) si $a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$ ) pour tout i.
$\mathcal{S}_n$ ($\mathbb{K}$) et $\mathcal{A}_n$ ($\mathbb{K}$) désignent respectivement les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$)
$\mathcal{S}_n$ ($\mathbb{K}$) et $\mathcal{A}_n$ ($\mathbb{K}$) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$). ($\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ )

Une matrice $A=(a_{ij})_n$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si $a_{ij} = 0$ pour tout i>j (resp. pour tout i<j)
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est noté $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ ). Ces deux ensembles sont des sous anneaux de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$).

Une matrice $A=(a_{ij})_n$ est dite diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$. L'ensemble des matrices diagonales, noté $\mathcal{D}_n$ ($\mathbb{K}$) est un sous anneau commutatif de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$). On a $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$

### 7.3 –Matrices carrées inversibles:

Une matrice A$\epsilon$ $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) est inversible s'il existe une matrice B$\epsilon$ $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) telle que $AB=BA= I_n$ . Dans ce cas B est unique, elle s'appelle inverse de A et est notée $B=A^{-1}$.

- A est inversible si et seulement si rg(A)=n
- Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. u est un isomorphisme si et seulement si la matrice $M_u$ représentant u relativement à une base de E est inversible.
- Si A est inversible, alors $A^{-1}$ l'est aussi et on a $(A^{-1})^{-1} = A$
- Si A est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et On a ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$
- Si A et B sont inversibles, alors (AB) est inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- Soient A$\epsilon$ $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) et B $\epsilon$ $\mathcal{M}_{n,p}$ ($\mathbb{K}$) . Si A est inversible, alors rg(AB) = rg(B)

L'ensemble $\mathcal{GL}_n$ ($\mathbb{K}$) des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) , muni de la multiplication est un groupe appelé groupe linéaire.

Soient A$\epsilon$ $\mathcal{GL}_n$ ($\mathbb{K}$) , X et Y deux vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^n$ . X est solution du système AX=Y si et seulement si $X= A^{-1} Y$

## 7.4 –Déterminant d'une matrice carrée:

Le déterminant d'une matrice $A=(a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre réel :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

où $\mathcal{G}_n$ est le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation σ.

Le déterminant est une forme n-linéaire antisymétrique (alternée) des vecteurs colonnes ou des vecteurs lignes. Cette propriété a les conséquences suivantes :

- si on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe ;
- si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul ;
- si on multiplie tous les termes d'une ligne ou d'une colonne par un réel α, le déterminant est multiplié par α ;
- si on ajoute à une colonne (resp. ligne) un multiple d'une autre colonne (resp. ligne) le déterminant ne change pas.

Le déterminant vérifie les propriétés suivantes:

- $\det(AB)=\det(A).\det(B)$
- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, dans ce cas on a $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- L'application $\det : \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupe, son noyau $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})=\{A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) : \det(A)=1\}$ est le groupe spécial linéaire
- $\det(\alpha A)= \alpha^n \det(A)$
- $\det(I_n)=1$
- $\det({}^tA)=\det(A)$
- $\det(\bar{A})= \overline{\det(A)}$
- Si A est triangulaire supérieure ou inférieure, on a $\det(A)= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

# 0 . Rappels sur les matrices

Soit matrice A=$(a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) , et soit $A_{ij}$ la matrice $\mathcal{M}_{n-1}$ ($\mathbb{K}$) obtenue en enlevant à la matrice A le vecteur ligne d'indice i et le vecteur colonne d'indice j. On a (méthode de Laplace) :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Le terme $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ s'appelle cofacteur d'indice (i,j) et le terme $\det(A_{ij})$ s'appelle mineur d'indice (i,j)

La comatrice de A est la matrice : $\mathrm{com}(\mathrm{A}) = ((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))_n \in \mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) . On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}(com(A))$$

# 1 . Valeurs propres et vecteurs propres

**Définition :** Soit A une matrice carrée, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne V non nul tel que $AV = \lambda V$ . Un tel vecteur s'appelle vecteur propre de A associée à λ. L'ensembles des valeurs propres de A est nommé spectre et est noté Spec(A)

**Exemple:**

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, alors tous ses éléments diagonaux $\lambda_j$ $1 \leq j \leq n$ sont des valeurs propres de A associées au vecteurs propres $E^j$ , où $E^j$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne canonique de $\mathbb{K}^n$ . En effet, on a:

$$(AE^j)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E_k{}^j \qquad \forall i,j \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Or $a_{ik} = \delta_{ik}\, \lambda_i \; et \; E_k{}^j = \delta_{kj}$ , donc $(AE^j)_i = \lambda_i\, \delta_{ij} = \lambda_j\, \delta_{ij} = \lambda_j\, E_i{}^j$

Par suite: $AE^j = \lambda_j\, E^j$

**Proposition 1.1 :** Une matrice est singulière (non inversible) si et seulement si elle admet une valeur propre nulle.

Démonstration: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice singulière, alors rg(A) <n, cela signifie que ses n vecteurs colonnes $A^j$ ne sont pas linéairement indépendants , il existe n nombres $\alpha_j$ non tous nuls tels que:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_j A^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à écrire , si on désigne par V le vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$ dont les composantes les $\alpha_j$ , AV=0V
d'où V est une vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Réciproquement, si A possède une valeur propre nulle, cela revient à dire que le noyau de l'endomorphisme U : X → AX (considéré comme application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$) n'est pas réduit à {0}, donc rg(U) ≠n , or rg(U) =rg(A) (car A est la matrice de U dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ) , par suite A est singulière.

**Corolaire 1.1:** Un scalaire $\lambda$ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si la matrice $A-\lambda I_n$ est singulière.

Démonstration: Il suffit de remarquer que 0 est une valeur propre de la matrice $A-\lambda I_n$.

**Exemple:** Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(2 - \lambda)(1 + \lambda) - 4 = \lambda^2 -\lambda - 6 =(\lambda-3)(\lambda+2)$

La matrice $A - \lambda I_2$ est singulière si et seulement si $\lambda =3$ ou $\lambda=-2$ . Les valeurs propres de A sont donc 3 et -2.

**Proposition 1.2:** Tous système formé de k ($2\leq k\leq n$) vecteurs propres associés à k valeurs propres d'une matrice, distinctes deux à deux, est linéairement indépendants.

Démonstration: Procédons par récurrence sur l'entier k:

Pour k=2, soient $V_1$ et $V_2$ deux vecteurs propres d'une matrice A associés respectivement aux valeurs propres distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ et soient $\alpha_1$ et $\alpha_1$ deux scalaires tels que $\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2= 0$,

on a $A(\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2) = 0 = \alpha_1 A(V_1)+\alpha_2 A(V_2)= \alpha_1\lambda_1 V_1+\alpha_2\lambda_2 V_2$

Ce qui implique que $\alpha_1(\lambda_2-\lambda_1)V_1= 0$, d'où $\alpha_1 =0$, par suite $\alpha_2=0$.

Supposons la propriété vraie pour k <n et montrons qu'elle est également vraie pour k+1. Soient $V_1 , \ldots, V_{k+1}$ k+1 vecteurs propres d'une matrice A associés respectivement aux k+1propres distinctes $\lambda_1 \ldots \lambda_{k+1}$ et soient $\alpha_1 \ldots \alpha_{k+1}$ des scalaires tels que : $\alpha_1 V_1+\ldots\alpha_{k+1}V_{k+1}= 0$ (1)

on a $A(\alpha_1 V_1+\ldots+\alpha_{k+1}V_{k+1}) = 0 = \alpha_1 A(V_1)+\ldots+\alpha_{k+1}A(V_{k+1})= \alpha_1\lambda_1 V_1+\ldots+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}V_{k+1}$ (2)

En multipliant l'égalité (1) par $\lambda_{k+1}$ et en la soustrayant à l'égalité (2) , on obtient :

$\alpha_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)V_1+\ldots+\alpha_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)V_k = 0$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, le système $\{V_1 , \ldots,V_k\}$ est linéairement indépendant, donc $\alpha_j(\lambda_{k+1}-\lambda_j) =0$ , par suite $\alpha_j =0$ pour tout j ($1\leq j\leq k$) . En reportant ceci dans l'égalité (1), on obtient $\alpha_{k+1} =0$ **.**

# 1 . Valeurs propres et vecteurs propres

**Définition :** Deux matrices A et B $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice P de $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ telle que AP = P B

**Remarque :** AP=PB est équivalent à $A = PBP^{-1}$ et à $B = P^{-1}AP$ . La relation « A et B semblables » est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Proposition 1.3 :** Soient u un endomorphisme de E (E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$), $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Les matrices M et M' de u respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ sont semblables.

Démonstration: Posons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ , $M=(m_{i,j})_n$ $M'=(m'_{i,j})_n$ .
Les vecteurs $f_j$ s'expriment dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ .
La matrice $A=(a_{ij})_n$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ . Il est à noter que A est inversible car elle est formée de vecteurs colonnes linéairement indépendants.

On a $u(f_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u(e_i)$

or $u(f_j) = \sum_{k=1}^{n} m'_{k,j} f_k$ et $u(e_i) = \sum_{s=1}^{n} m_{s,i} e_s$

donc $u(f_j) = \sum_{k=1}^{n} m'_{k,j} (\sum_{s=1}^{n} a_{s,k} e_s) = \sum_{s=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{s,k} m'_{k,j}) e_s = \sum_{s=1}^{n} (AM')_{s,j} e_s$ , d'une part

et $u(f_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (\sum_{s=1}^{n} m_{s,i} e_s) = \sum_{s=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} m_{s,i} a_{i,j}) e_s = \sum_{s=1}^{n} (MA)_{s,j} e_s$

d'où $(AM')_{i,j} = (MA)_{i,j}$ $\forall i,j$ , par suite AM' = MA

**Proposition 1.4 :** Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres .

Démonstration: Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit P une matrice de $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$
Soit $\lambda$ est une valeur propre de A et V un vecteur propre associé ($V \neq 0$) , on a:
$AV = \lambda V \iff P^{-1}AV = \lambda P^{-1}V \iff P^{-1}APP^{-1}V = \lambda P^{-1}V \iff BW = \lambda W$ ($W \neq 0$)

**Remarque:** Tenant compte des deux proposition précédentes, on peut définir les valeurs propres d'un endomorphisme comme étant les valeurs propres de sa matrice dans une base quelconque.

# 2 . Polynôme caractéristique d'une matrice

**Définition :** On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A=(a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme:

$$P_A(X) = \sum_{\sigma\in G_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i),i} - \delta_{\sigma(i),i} X)$$

où $\mathcal{G}_n$ est le groupe des permutations σ de {1,….,n} , $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ et $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker

**Remarques:**

- Soit $x \in \mathbb{K}$, si on substitue x au monôme X dans l'expression de $P_A(X)$, on obtient $P_A(x) = \det(A - xI_n)$. Ainsi, par abus de notation, on a $P_A(X) = \det(A - XI_n)$
- $P_A(X)$ est un polynôme de degré n a coefficients dans $\mathbb{K}$ ($P_A(X) \in \mathbb{K}_n[X]$ )
- Le coefficient dominant (du monôme $X^n$) de $P_A(X)$ est $(-1)^n$
- Le coefficient de degré n-1(du monôme $X^{n-1}$) de $P_A(X)$ est $(-1)^{n-1}$ Trace(A) $\quad$ ($\mathrm{Trace}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$)
- Le coefficient constant de $P_A(X)$ est det(A)

**Exemple:** Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_A(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 2-X & 3 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = (2 - X)(1 - X) + 3 = X^2 - 3X + 5$

$P_A(X) = (-1)^2 X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$

**Théorème 2.1:** Les valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique .

Démonstration: Une matrice A d'ordre n possède une valeur propre λ revient à dire , d'après le corolaire 1.1, que la matrice $A-\lambda I_n$ est singulière, ce qui est équivalant à $\det(A-\lambda I_n)=0$ , c.à.d $P_A(\lambda) = 0$.

**Définition :** On appelle multiplicité algébrique d'une valeur propre λ d'une matrice A, la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique $P_A(X)$, c'est-a-dire le plus grand entier m tel que $(X-\lambda)^m$ divise $P_A(X)$.

**Corolaire 2.1:** Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet exactement n valeurs propres chacune comptée avec sa multiplicité.

## 2 . Polynôme caractéristique d'une matrice

Démonstration: C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'algèbre selon lequel on peut écrire

$$P_A(X) = \prod_{k=1}^{l} (\lambda_k - X)^{m_k}$$

Où $m_k$ est la multiplicité de de la racine $\lambda_k$ avec $m_1 + \ldots + m_l = n$

**Remarque:** Dans $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{R}$), une matrice possède au plus n valeurs propres distinctes ou non. Il peut arriver que le polynôme caractéristique n'ait pas de racine sur $\mathbb{R}$, auquel cas la matrice A n'a pas de valeur propre réelle, ou qu'il n'ait que $n' < n$ racines réelles .

**Exemple** : Soit $A=\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ , $P_A(X) = X^2 - 2\cos(\alpha)\,X + 1$

Si A est considérée comme matrice de $\mathcal{M}_2$ ($\mathbb{C}$) , elle possède deux valeurs propres distinctes: $e^{\pm i\alpha}$ . Par contre, comme matrice de $\mathcal{M}_2$ ($\mathbb{R}$), A n'a aucune valeur propre .

**Proposition 2.1 :** Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration : Soit A une matrice d'ordre n et ${}^tA$ sa transposée , on a:

$P_{{}^tA}(X) = \det({}^tA - XI_n) = \det({}^t(A - XI_n)) = \det((A - XI_n)) = P_A(X)$

**Proposition 2.2 :** Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration: Soient A et A' deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) et soit B une matrice de $\mathcal{GL}_n$ ($\mathbb{K}$) telle que AB=BA'

On a $P_A(X) = \det(A - XI_n) = \det(BA'B^{-1} - B(XI_n)B^{-1}) = \det(B(A' - XI_n)B^{-1}) = det(A' - XI_n) = P_{A'}(X)$

# 3 . Trigonalisation d’une matrice

**Proposition 3.1 :** Les valeurs propres d’une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux .

Démonstration: Soit A=$(a_{i,j})_n$ une matrice triangulaire . Soit x ϵ $\mathbb{K}$, il est claire que la matrice $A - xI_n$ est également triangulaire, son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux. On a alors:

$$\det(A - xI_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - x)$$

Par suite, x est valeur propre de A si et seulement si $x = a_{i,i}$ pour un certain i.

**Définition :** Un polynôme P ϵ $\mathbb{K}_n$ [X] est dit scindé dans $\mathbb{K}_n$ [X] s’il est produit de polynômes de degré un de $\mathbb{K}_n$ [X]

**Proposition 3.2 :** Le polynôme caractéristique d’une matrice triangulaire est scindé.

Démonstration : Il résulte de la démonstration précédente que $P_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - X)$, il est donc produit de polynômes de degré un de $\mathbb{K}_n$ [X].

**Remarque:** Si le polynôme caractéristique d’une matrice A est scindé, alors la somme de ses racines $\lambda_i$ est égale à sa trace et le produit de ses racines est égale à son déterminant : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Trace(A)$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$

# 3 . Trigonalisation d’une matrice

**Définition :** Une matrices A de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure .

**Remarque :** Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

En effet, soit A une matrice triangulaire inférieure et soit U l’endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Il est claire que la matrice de U dans la base $(e_n, \ldots, e_1)$ est la matrice transposée de A qui est triangulaire supérieure. Par suite, d’après la proposition 1.3 , ces deux matrices sont semblables.

**Théorème 3.1:** Une matrices carrée est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé .

Démonstration : Soit A est une matrice de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$)

Si A est trigonalisable, elle est donc semblable à une matrice triangulaire T . D’après la proposition 3.2, le polynôme caractéristique $P_T(X)$ de T est scindé dans $\mathbb{K}_n[X]$. Donc, d’après la proposition 2.2 , $P_A(X)$ est scindé.

Pour la réciproque, précédons par récurrence sur l’ordre n de la matrice A.

Pour n =1, le résultat est trivial. Soit n >1 et supposons que toute matrice d’ordre n-1 dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) avec $P_A(X)$ scindé dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit u l’endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ .

$P_A(X)$ admet au moins une racine $\lambda_1$ dans $\mathbb{K}$ et s'écrit $P_A(X)$=( X- $\lambda_1$ )Q(X) où Q(X) est un polynôme de degré n-1 scindé dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ . Soit $v_1$ un vecteur propre associé à $\lambda_1$ ( $v_1 \neq 0$) , on a $u(v_1) = Av_1 = \lambda_1 v_1$

On complète $\{v_1\}$ en une base $\mathcal{B}' = \{v_1 , v_2 , \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ et on considère la matrice M représentant u dans $\mathcal{B}'$. On a :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & L & \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \end{pmatrix}$$

Où N est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et L une matrice $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$

D'après la proposition 1.3, A et M sont semblables, d'où d'après la proposition 2.2, elles ont le même polynôme caractéristique, par suite : $P_A(X)$=( $\lambda_1$ -X)Q(X) =$P_M(X)$= det$(M - XI_n)$=( $\lambda_1$ -X)det$(N - XI_n)$.

Il en résulte $P_N(X)$=det$(N - XI_n)$=Q(X), sachant Q(X) est scindé dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et d'après l'hypothèse de récurrence, N est trigonalisable. Il existent donc une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et une matrice $R \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $T = R^{-1}NR$.

Considérons la matrice:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \end{pmatrix}. \text{ On a } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LR & \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}NR & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LR & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \end{pmatrix}$$

La matrice M est donc semblable à une matrice triangulaire, or d'après la proposition 1.3 les matrices A et M sont semblables, par conséquent A est trigonalisable.

**Corolaire 3.1:** Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration: C'est une conséquence du corolaire 2.1 et du théorème 3.1

# 3 . Trigonalisation d'une matrice

**Exemple :** Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice :

A=$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$, on a $P_A(X) = \det(A-XI_3) = \begin{vmatrix} 9-X & 1 & 6 \\ -7 & 1-X & -6 \\ -10 & -1 & -7-X \end{vmatrix} = -(2-X)^2(1+X)$

A possède deux valeurs propres $\lambda_1 = 2$ (racine double) et $\lambda_2 = -1$ . $P_A(X)$ est donc scindé dans $\mathbb{K}_3[X]$ , la matrice A est donc trigonalisable. Pour trigonaliser A, procédons comme suit :

On a $A-\lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -7 & -1 & -6 \\ -10 & -1 & -9 \end{pmatrix}$ On a $A-\lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 6 \\ -7 & 2 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

On vérifie que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés respectivement à $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

Si on prend par exemple $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

La matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$P = (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et A est semblable à la matrice :

$A' = P^{-1}AP = (Av_1\ \ Av_2\ \ Av_3)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (Av_3)_{\mathcal{B}'}$ , c.à.d. $av_1 + bv_2 + cv_3 = Av_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix}$, on trouve alors: a=1, b=-3, c=2 .

# 4 . Sous-espaces propres d'une matrice

**Proposition 1.4:** Soit A une matrice $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda$ une valeur propre de A. L'ensemble $E_\lambda=\{v \in \mathbb{K}^n : Av= \lambda v\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Il est appelé espace propre associé à la valeur propre $\lambda$.

Démonstration: Triviale

**Définition :** Soit A une matrice $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda$ une valeur propre de A. La multiplicité géométrique de $\lambda$ est la dimension de l'espace propre $E_\lambda$ associé à $\lambda$.

**Remarque:** Soit L l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a $E_\lambda = \ker(L- \lambda i_n)$ où $i_n$ est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}^n$. On a donc $\dim(E_\lambda)= n - rg(Im(L- \lambda i_n))= n - rg(A- \lambda I_n)$.

**Proposition 2.4:** Soit $\lambda$ une valeur propre d'une matrice carrée A . La multiplicité géométrique de $\lambda$ est inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique.

Démonstration : Soit L l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $L_\lambda$ la restriction de L à $E_\lambda$ .Soit $\mathcal{B}_\lambda =\{v_1 , \dots , v_m\}$ une base de $E_\lambda$ , où $m=\dim( E_\lambda)$. On complète $\mathcal{B}_\lambda$ en une base $\mathcal{B} =\{v_1 , \dots , v_m ,v_{m+1} , \dots , v_n \}$ de $\mathbb{K}^n$ (c'est possible d'après le théorème de la base incomplète).

Soit M la matrice représentant L dans la base $\mathcal{B}$ . D'après la proposition 1.3 , M et A sont semblables, et par suite, d'après la proposition 2.2, elles ont le même polynôme caractéristique .

On a $M=\begin{pmatrix} \lambda I_m & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $C\in \mathcal{M}_{n-m,n-m}(\mathbb{K})$, $D\in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbb{K})$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{K})$.

D'où $P_A(X)=P_M(X) = (\lambda - X)^m \det(C - XI_{n-m}) = (\lambda - X)^m P_C(X)$
Par suite le polynôme $(\lambda - X)^m$ divise $P_A(X)$. D'où le résultat.

# 5 . Diagonalisation d'une matrice

**Définition :** Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable a une matrice diagonale.

**Proposition 1.5.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n$ est somme directe des sous-espaces propres de A.

Démonstration: Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A et $E_1, \ldots, E_k$ les sous-espaces propres associés.

On a toujours, d'après la proposition 1.2, $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$ .

Si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice diagonale D. D'après la proposition 1.4, A et D ont les mêmes valeurs propres.

Soient $F_1, \ldots, F_k$ les sous-espaces propres de D associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Il est claire que les vecteurs canoniques $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{K}^n$ sont des valeurs propres de D. Donc $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ $\exists$ $j \in \{1,\ldots,k\}$ tel que $e_i \in F_j$, par conséquent, $\mathbb{K}^n$ est somme directe des sous-espaces propres $F_1, \ldots, F_k$.

Soit P une matrice de $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}DP=A$, d'après cette relation, v est un vecteur propre de A associé à $\lambda_i$ si et seulement si P(v) est un vecteur propre de D associé à la même valeur propre. Par suite, on a pour tout j, $F_j = P(E_j)$, et par conséquent $\mathbb{K}^n$ est somme directe des sous-espaces propres $E_1, \ldots, E_k$

Inversement, supposons que $\mathbb{K}^n$ est somme directe des sous-espaces propres $E_1, \ldots, E_k$ . Soient $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ leurs bases respectives. Le système $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Soit L l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ . Il est claire que la matrice M représentant L dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale. Donc A est diagonalisable.

**Remarque:** La proposition précédente revient à dire qu'une matrice A carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.

# 5 . Diagonalisation d'une matrice

**Théorème 1.5 :** Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si :

a) le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{K}_n[X]$ ;

b) la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de A est égale à sa multiplicité algébrique.

Démonstration : Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A et $E_1, \ldots, E_k$ les sous-espaces propres associés.

Si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice D diagonale, or le polynôme caractéristique de D est scindé dans $\mathbb{K}_n[X]$ et, puisque d'après la proposition 2.2 , $P_D(X) = P_A(X)$

Donc $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}_n[X]$. D'où l'assertion a)

Sachant que d'après le théorème 2.1, les valeurs propres de A sont les racines $P_A(X)$, Il résulte de l'assertion a) que $m(\lambda_1) + \ldots + m(\lambda_k) = n$ , où $m(\lambda_i)$ est la multiplicité algébrique de $\lambda_i$ .

D'après la proposition précédente, $\mathbb{K}^n$ est somme directe de $E_1, \ldots, E_k$ , donc $\dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k) = n$. Sachant que d'après la proposition 2.4, $\dim(E_i) \leq mg(\lambda_i)$, donc $\dim(E_i) = m(\lambda_i)$ pour tout $i=1,\ldots,k$ .

Inversement, si $\dim(E_i) = m(\lambda_i)$ pour tout $i=1,\ldots,k$ et si $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}_n[X]$ , ce qui se traduit par $m(\lambda_1) + \ldots + m(\lambda_k) = n$, donc $\dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k) = n$ , donc $\mathbb{K}^n$ est somme directe de $E_1, \ldots, E_k$. Par conséquent, d'après la proposition précédente, A est diagonalisable.

**Corollaire :** Si une matrice carrée d'ordre n possède n valeurs propres distinctes, cette matrice est diagonalisable.

# 5 . Diagonalisation d'une matrice

**Exemple :** On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a $P_A(X) = (1-X)(2-X)^2$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2=2$. On obtient les vecteurs propres en résolvant les systèmes:

$$(A-\lambda_1 I_3)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad (A-\lambda_2 I_3)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a rg(A- $\lambda_1 I_3$) =2 donc , dim($E_1$) =1 et rg(A- $\lambda_2 I_3$) =1, donc dim($E_2$) =2 . A est donc diagonalisable.

$E_1$ est engendré par le vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2$ par les vecteurs propres $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si on pose P= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $et\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $on\ a\ bien\ AP = PD$

Par contre, si on prend la matrice étudiée dans le chapitre précédent: B=$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

$P_B(X) = -(2-\mathrm{X})^2(1+\mathrm{X})$. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 2$et $\lambda_2$=-1.
On a rg(B- $\lambda_1 I_3$) =2 donc dim($E_1$) =1 , or la multiplicité algébrique de $\lambda_1$ est égale à 2 (racine double), donc la matrice B n'est pas diagonalisable.

# 6 . Polynôme minimal d'endomorphisme

Avant d'aborder ce chapitre, nous allons d'abord indiquer dans le tableau ci-dessous comment les notions que nous avons établies sur les matrices lors des chapitres précédents, et qui sont invariantes par similitude, peuvent s'étendre sur les endomorphismes.

Soient f un endomorphisme de E, M matrice qui représente f dans une base $\mathcal{B}=\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, et soit l'isomorphisme $I : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ définie par $I\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1e_1+\ldots+x_ne_n$.

| **Notions** | **Matrice M** | **Endomorphisme f** |
|---|---|---|
| Rang | $rg(M) \stackrel{def}{=}$ nbr. max de vecteurs colonnes libres | $rg(f) \stackrel{def}{=} \dim(Im(f)) = rg(M)$ |
| Invisibilité | $M^{-1}$ inverse de M $\stackrel{def}{=}$ $MM^{-1}=M^{-1}M^{-1}=I_n$ | $f^{-1}$ inverse de f $\stackrel{def}{=} fof^{-1}=fof^{-1}=Id$ ($M^{-1}$ représente $f^{-1}$) |
| Déterminant | $\det(M) \stackrel{def}{=} \sum_{\sigma\in G_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} M_{i\sigma(i)}$ | $\det(f) \stackrel{def}{=} \det(M)$ |
| Valeur propre | $\lambda$ valeur propre de M $\stackrel{def}{=} \exists V\epsilon\mathbb{K}^n, V\neq 0, MV=\lambda V$ | $\lambda$ valeur propre de f : $\exists w\epsilon E, w\neq 0: f(w)=\lambda w$ |
| Vecteur propre | V vecteur propre de M $\stackrel{def}{=}$ $\exists\lambda \epsilon \mathbb{K}$: $MV=\lambda V$ | w vecteur propre de f: $\exists\lambda \epsilon \mathbb{K}$: $f(w)=\lambda w$ ($w=I(V)$) |
| Espace Propre | $E_\lambda$ s.e. propre associé à $\lambda \stackrel{def}{=} \{V\epsilon\mathbb{K}^n : MV=\lambda V\}$ | $F_\lambda$ s.e. propre associé à $\lambda \stackrel{def}{=} \{w\epsilon E: f(w)=\lambda w\}$ ($F_\lambda=I(E_\lambda)$) |
| Similitude | M semblable à N $\stackrel{def}{=} \exists$ P inversible : MP=PN | N représente f dans une base de E |
| P. Caractéristique | $P_M(X) \stackrel{def}{=} \det(A - XI_n)$ | $P_f(X) \stackrel{def}{=} P_M(X)$ |
| Trigonalisation | M semblable à une matrice triangulaire | f est représentée par une matrice triangulaire |
| Diagonalisation | M semblable à une matrice diagonale | f est représentée par une matrice diagonale |

# 6 . Polynôme minimal d'endomorphisme

Dans la suite E désigne un espace vectoriel de dimension n ($n \geq 1$) sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ), $\mathcal{L}(E)$ l'anneau et l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau et l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Toutes les notions et propriétés que nous établirons sur les endomorphismes s'étendent d'une manière naturelle sur les matrices.

**Définition**: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable sous f ou f-stable si $f(F) \subset F$.
Dans ce cas la restriction de f à F, notée $f|F$, est un endomorphisme de F.

**Définition**: Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ ave $P= a_0 + a_1X + a_2X^2 ,\ldots,+ a_kX^d$ . On désigne par P(f) l'endomorphisme de E défini par $P(f)= a_0\, Id+ a_1f + a_2f^2 ,\ldots, + a_kf^d$ où $f^m = fofo\ldots of$ (m compostions) et Id l'endomorphisme identité de E. On appelle polynôme en f tout endomorphisme de la forme P(f).
De même, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par P(A) la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $P(A)= a_0\, I_n+ a_1A + a_2A^2 ,\ldots, + a_kA^d$ ; et on appelle polynôme en A toute matrice de la forme P(A).

**Proposition 1.6:** Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a:
(1) $P(f) + Q(f) = (P + Q)(f)$ et $P(A) + Q(A) = (P + Q)(A)$ ;
(2) $P(f)oQ(f) = Q(f)oP(f) = (PQ)(f)$ et $P(A)Q(A) = Q(A)P(A) = (PQ)(A)$ ;
(3) Ker(P(f)) et Im(P(f)) sont des sous-espaces f-stables de E.

Démonstration:
(1) et (2) évidentes;
(3)Si on prend $Q(x)=X$, on a d'après (2), $P(f)oQ(f)= P(f)of=Q(f)oP(f)=foP(f)$;
Soit $v \in Ker\, P(f)$, on a $P(f)(v)=0$ et $P(f)(f(v))=(P(f)of)(v)= (foP(f))(v)=f(P(f)(v))=f(0)=0$, donc $f(v)\in ker\, P(f)$
De même, soit $v \in Im\, P(f)$, il existe $w \in E$ tel que $v=P(f)(w)$, on a $f(v)=f(P(f)(w))=P(f)(f(w)) \in Im\, P(f)$ .

# 6 . Polynôme minimal d'endomorphisme

**Définition**: On appelle polynôme annulateur de $f \in \mathcal{L}(E)$ tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(f) = 0$.

**Proposition 2.6:** Tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins un polynôme annulateur.

Démonstration:
On considère l'application $L_f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par : $L_f(P)=P(f)$, d'après la propriété (1) de la proposition précédente, $L_f$ est un morphisme d'espaces vectoriels. Puisque $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, $L_f$ ne peut être injective, donc $\mathrm{Ker}(L_f) \neq \{0\}$, par suite $P(f) = 0 \ \forall P \in \mathrm{Ker}(L_f)$

**Remarque:** D'après la propriété (2) de la proposition 1.6 , $L_f$ est aussi un morphisme d'anneaux, donc son noyau $\mathrm{Ker}(L_f)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, et comme $\mathbb{K}[X]$ est principal cet idéal est engendré par un seul polynôme unitaire .

**Définition**: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle polynôme minimal de f et on note $\mu_f$ le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de f. C'est aussi le polynôme annulateur de f unitaire et de plus petit degré.

**Remarque:** De la définition $\mu_f$, tout polynôme annulateur de f est un multiple de $\mu_f$.

**Exemples:**

- Si $f=0$, on a $\mu_f = X$
- Si $f=Id$ , on a $\mu_f = X-1$
- Si f est un projecteur de E non trivial (c.à.d $f^2 = f$ avec $f \neq 0$ et $f \neq Id$) , on a $\mu_f = X^2-X$. En effet, le polynôme $P(X)= X^2-X$ est un annulateur de f, s'il existe un polynôme unitaire Q anulateur de f tel que $d°(Q) < d°(P)$, alors d'après la remarque précédente, Q divise P, donc $Q(X) = X$ ou $Q(X) = X- 1$, ce que n'est pas possible car $f \neq 0$ et $f \neq Id$.

# 7 . Théorème de Cayley-Hamilton

**Lemme 1.7:** Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E f-stable et $f|F$ la restriction de f à F. On a :

(1) Le polynôme minimal $\mu_{f|F}$ de $f|F$ divise le polynôme minimal $\mu_f$ de f ;

(2) Le polynôme caractéristique $P_{f|F}$ de $f|F$ divise le polynôme caractéristique $P_f$ de f.

Démonstration:

(1) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(f|F) = P(f)|F$ (justifier). Donc $\mu_f(f|F) = \mu_f(f)|F = 0$. Le polynôme $\mu_f$ est donc un annulateur de $f|F$, par suite $\mu_{f|F}$ divise $\mu_f$ .

(2) Soient $m = \dim(F)$ et $\mathcal{B}_F = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de F. On complète la base $\mathcal{B}_F$ en une base $\mathcal{B}_E$ de E. La matrice M de f dans la base $\mathcal{B}_E$ est une matrice triangulaire par blocs de la forme:

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{n-m} & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est la matrice de $f|F$ dans la base $\mathcal{B}_F$, $B \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. On a:

$$P_f(X) = P_M(X) = \begin{vmatrix} A - XI_m & C \\ O_{n-m} & B - XI_{n-m} \end{vmatrix} = \det(A - XI_m)\det(B - XI_m)$$

Car le déterminant d'une matrice triangulaire par bloc est le produit des déterminants des blocs diagonaux (justifier).

Donc $P_f(X) = P_{f|F}(X)\det(B - XI_m)$, ce qui montre que $P_{f|F}$ divise $P_f$.

**Théorème 1.7** (de Cayley-Hamilton): Le polynôme caractéristique $P_f$ d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est un annulateur de f.

# 7 . Théorème de Cayley-Hamilton

Démonstration:

Montrer que $P_f(f) = 0$ revient à montrer que $(P_f(f))(x) = 0$ pour tout vecteur x. Fixons x ($x \neq 0$) et notons m le plus petit entier tel qu'il existe des scalaires $a_0$ , $a_1$ , … , $a_{m-1}$ vérifiant:

$$a_0 x + a_1 f(x) + \ldots + a_{m-1} f^{m-1}(x) + f^m(x) = 0 \quad (*)$$

La famille $\mathcal{B}_F = \{x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\}$ est donc libre.

Soit F le sous espace de E engendré par $\mathcal{B}_F$ . Il est claire que F est f-stable, donc la restriction $f|F$ de f à F est un endomorphisme de F. Dans cette base, $f|F$ est représentée par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que le polynôme caractéristique $P_{f|F}$ de $f|F$ est $P_{f|F}(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m$ .

De l'équation (*) on déduit que $P_{f|F}(f(x))=0$.

D'après le lemme 1.7, il existe un polynôme Q tel que $P_f = QP_{f|F}$, donc $P_f(f(x))=Q(f(x))\, P_{f|F}(f(x))=0$.

Ainsi, pour tout $x \in E$ on a $P_f(f(x))=0$. Ce qui montre alors que $P_f(f) = 0$.

**Corollaire 1.7 :** Le polynôme minimal $\mu_f$ d'un endomorphisme f divise son polynôme caractéristique $P_f$ .

Démonstration: c'est une conséquence immédiate du théorème 1.7 et du lemme 1.7.

**Remarque :** Il résulte donc de ce corollaire que les racines du polynôme minimal de f sont des valeurs propres de f.

**Lemme 2.7** (lemme des noyaux) : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \ldots, P_m$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et $P=P_1 \ldots P_m$ , on a : $\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_m(f))$.

Démonstration:
Pour simplifier, traitons le cas m=2. D'après la proposition 1.6 propriété (2) on a $P(f)=P_1(f)P_2(F)$, donc $Ker(P_i(f)) \subset Ker(P(f))$ pour i=1, 2 . Puisque $P_1$ et $P_2$ sont premiers entre eux , d'après le lemme de Bézout, il existe deux polynômes $U_1$ et $U_2$ tels que $U_1P_1 + U_2P_2 =1$. Il en résulte que :

$$U_1(f)P_1(f) + U_2(f)P_2(f) =Id \quad (*)$$

Soit $x \in E$, posons $x_1 =U_2(f)P_2(f) (x)$ et $x_2 = U_1(f)P_1(f) (x)$, on a $x_1 \in Ker(P_1(f))$ et $x_2 \in Ker(P_2(f))$
D'après (*), on a $x_1 + x_2 = x$ , donc $Ker(P(f)) = Ker(P_1(f)) + Ker(P_2(f))$ .
Par ailleurs, si $x \in Ker(P_1(f)) \cap Ker(P_2(f))$ , on a d'après la définition de $x_1$ et $x_2$ , $x_1 = x_2=0$, donc x=0.

**Théorème 2.7:** Un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Démonstration:
Soit f un endomorphisme de E diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B} =\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, avec pour coefficients diagonaux les valeurs propres $\lambda_i$ i=, …, $s_s$ chacune apparaissant avec sa multiplicités algébriques $m_i$.
Posons $P(X)=(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\ldots(X - \lambda_s)$ et soient $\lambda_i$ une valeur propre de f et $v \in E_{\lambda i}$ . Puisque $f(v)- \lambda_i v =0$, on a $P(f)(v)=0$. Or, d'après la proposition 1.5, E est somme directe des sous-espaces propres $E_{\lambda i}$ , donc $P(f)(x)=0$ pour tout $x \in E$ . Par suite le polynôme P est un annulateur de f, il en résulte donc que $\mu_f$ divise P(f). Par suite $\mu_f$ est scindé à racines simples.
Réciproquement, supposons que le polynôme minimal de f $\mu_f$ est scindé à racines simples, il s'écrit donc sous la forme $\mu_f = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_m)$ . D'après le lemme 2.7 (lemme des noyaux) on a :
$E=Ker\, \mu_f(f) = Ker ( f - \alpha_1 I) \oplus \ldots. \oplus Ker ( f - \alpha_m I)$
Pour chaque i =1, …, m notons $\mathcal{B}_i$ une base de $Ker ( f - \alpha_i I)$ puis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_m$ . $\mathcal{B}$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, par suite f est diagonalisable.