Prof. Kamal GHOUMID — Année universitaire $2020-2021$

4ème année "**Ingénierie Data Sciences & Cloud Computing**"

Cours "**Détection, Estimation & Information pour les Data Sciences**"

Série de TD $N^o. 5$

Ex-1- Décision fausse, Probabilité d'erreur.

Des donnés numériques massives sont reçues comme des échantillons $r_i = x_i + n$, où $x_i \in \{0, 1\}$ avec des probabilités égales et n est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1/4$. Au niveau du récepetur la décision suit la règle suivante :

- Si $r \leq 1/3$, on décide alors que l'émetteur a envoyé un "0".
- Si $r > 1/3$, on décide alors que l'émetteur a envoyé un "1"..

1. Étant donné que $x_1 = 1$, quelle est la probabilité que le récepteur décide qu'un "0" a été envoyé ?
2. Étant donné que $x_1 = 0$, quelle est la probabilité que le récepteur décide qu'un "1" a été envoyé ?

Ex-2- Décision, Maximum a postériori, Test optimal.

Il est souvent pratique de formuler un problème de décision en considérant une statistique obtenue à partir des observations des data. Pour cela, considérons le probléme de décision binaire de N observations indépendantes $r_1, r_2, r_3, ..., r_N$, d'une variable aléatoire Gaussienne d'ecart-type σ et moyenne $m \in \{0\ ,\ A\}$ avec une égalité des probabilités ($P(0) = P(A) = 0,5$). Où A est une constante connue.
La décision cherchée consiste à déterminer laquelle des deux valeurs de m correspond aux observations effectuées.

1. Donner les expressions de la fonction de densité d'observations sous chaque hypothèse.
2. Exprimer le rapport de vraisemblance a postériori qui minimise la probabilité d'erreur. Conclure concernant le test optimal.

Ex-3- Décision, Maximum a postériori, Probabilité d'erreur.

Dans un système de transmission des data, l'émetteur est constitué par une source qui émet les deux messages m_0 et m_1 avec les probabilités respectives p_0 et p_1, auxquels sont associés respectivement les signaux s_0 et s_1, de support de durée bornée $[0\ ,\ T]$. Du côté du récepteur, le signal reçu s'écrit :

$$r_i(t) = s_i(t) + b(t), \qquad i = 1, 2$$

Où $b(t)$ est un bruit additif, modélisé par un processus aléatoire stationnaire Gaussien, centré, de variance σ^2.

On désigne par H_0 et H_1 respectivement les hypothèses correspondant à l'émission des messages m_0 et m_1 :

$$H_0 : \quad r_0(t) = s_0(t) + b(t)$$
$$H_1 : \quad r_1(t) = s_1(t) + b(t)$$

Le souci au niveau du récepetur est que, si on se place à un instant fixé t_f, il doit décider, à partir de l'observation du signal reçu $r_i(t)$, lequel des messages m_0 et m_1 a été émis.

1. Donner les expressions des densités de probabilité de l'observation sous chacune des hypothèses (probabilités conditionnelles) $P(r/H_0)$ et $P(r/H_1)$, où $r = r(t_f)$.
2. En déduire l'expression du rapport de vraisemblance.
3. Soit η le seuil de décision. Montrer que la règle de décision peut s'écire :
$$r \lessgtr_{H_0}^{H_1} \frac{s_0 + s_1}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1 - s_0} ln(\eta), \qquad s_0 = s_0(t_f),\ s_1 = s_1(t_f),\ s_1 > s_0.$$
4. Calculer la probabilité d'erreur P_e au niveau du récepteur.
5. Dans le cas où $\eta = \frac{p_0}{p_1}$, exprimer P_e si les messages émis sont équiprobables.

Ex-4- Décision, Max. de vraisemblance, Max. a postériori, Prob. d'erreur.

Dans les mêmes conditions que celles de l'exercice précédent, on suppose les correspondances suivantes :

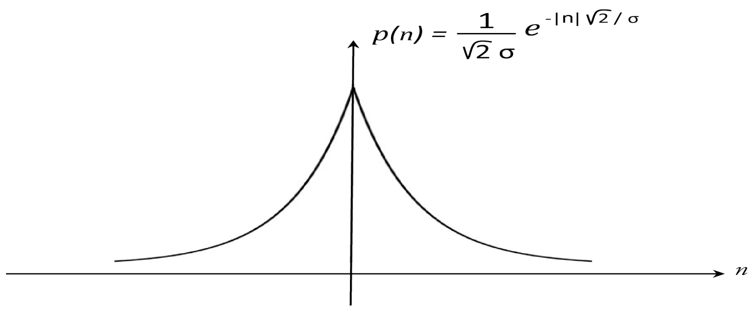
$$s_0(t) = 0, \qquad s_1(t) = 1, \qquad b(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

À un instant donné, on observe que $r = 0,6$.

1. En appliquant le test du maximum de vraisemblance (MV), quel signal a été envoyé ?
2. Supposons maintenant que la probabilité a priori de s_0 soit donnée par $p_0 = 2/3$. Refaire la question précédente en utilisant le test de maximum a postériori (MAP).
3. Évaluer la probabilité d'erreur dans le cas précédent.

Ex-5- Décision optimale, Seuil optimum, Probabilité d'erreur.

Des données massives sont utilisées dans un système numérique. À l'entrée du détecteur les data reçeus sont exprimées comme "$r = \ \pm\Lambda + n$", où les amplitudes $+\Lambda$ et $-\Lambda$ sont équiprobabes et le bruit n est une variable caractérisée par une pdf Laplacienne $p(n)$.



1. Déterminer le seuil optimum de dcision.
2. Calculer la probabilité d'erreur relative à cette décision en fonction de Λ et σ.
3. Déterminer le SNR requis pour obtenir une probabilité d'erreur de l'ordre de 10^{-5}. Comparer ce SNR à celui obtenu dans le cas d'un bruit AWGN.