



4<sup>ème</sup> année "Ingénierie Data Sciences & Cloud Computing"

Cours "Détection, Estimation & Information pour les Data Sciences"

Série de TD N<sup>o</sup>. 3

**Ex-1-** Estimation, Minimisation de l'Erreur Quadratique Moyenne "MMSE".

Dans une ferme, on suppose que les poids des têtes des ovins suivent une loi normale de moyenne  $56,2 \text{ kg}$  et d'écart-type  $5,1 \text{ kg}$ . Le nombre total d'ovins dans la ferme est 5000 et on extrait 60 échantillons de 25 têtes.

1. Quelle est la moyenne et l'écart-type de la distribution de moyenne dans le cas d'un tirage :
  - sans remise (échantillon exhaustif).
  - avec remise (échantillon non exhaustif).
2. Pour combien d'échantillons peut-on s'attendre à trouver une moyenne comprise entre  $53,7$  et  $58,6 \text{ kg}$  ?

Les paysans de cette ferme cherchent à estimer le poids des ovins sans les peser. Pour cela et grâce à leurs pratiques quotidiennes, ils ont réussi à élaborer une relation empirique, donnée par l'équation ci-dessous. Cette dernière est généralement valable entre le 6<sup>ème</sup> et le 36<sup>ème</sup> mois, elle prévoit les poids des ovins en fonction de leurs croissances. La mise à la disposition des professionnels de l'élevage d'ovin d'une telle méthode d'estimation rapide du poids vif, est d'un grand intérêt pratique, car elle permet d'estimer le poids vif des ovins à partir de leurs âges.

$$P = 27 + 10 \alpha \log \left( \frac{\text{Nombre de mois}}{\text{Mois}_{Ref}} \right)$$

Où  $P$  représente le poids des ovins en  $\text{kg}$ ,  $\text{Mois}_{Ref} = 6$  mois et  $\alpha$  un coefficient de proportionnalité qu'on cherche à l'estimer en utilisant la technique de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne MMSE (Minimum Mean Square Error).

Le tableau ci-dessous représente les poids évalués d'un échantillon d'ovins selon leurs mois de croissances.

3. Trouver en utilisant la technique MMSE, la valeur de  $\alpha$ . (Rq : un code MATLAB simple et adéquat peut aider à s'acquitter d'un tel calcul).
4. Calculer l'écart-type  $\sigma$ .

5. Estimer le poids d'un ovin de 21 mois et 15 jours.
6. Prédire la probabilité pour que le poids évalué d'un ovin de 21 mois et 15 jours soit supérieur à 59 kg.

Mois	Poids (kg)
6	27
12	42,34
18	54,63
24	59,17
30	66,71
36	71,85

**Ex-2- Estimation, MSE.**

On considère les data (échantillons)  $X_1, \dots, X_n$  comme variables aléatoires  $X_i$ , indépendantes et identiquement distribuées (iid) de la forme  $U(\theta, \theta + 2)$ . C'est-à-dire qu'elles suivent une distribution uniforme avec un minimum de  $\theta$  et un maximum de  $\theta + 2$ .

Soit l'estimateur de la moyenne :

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \hat{X}\end{aligned}$$

1. Calculer le biais de  $\hat{\theta}$  lors de l'estimation de  $\theta$ .
2. Calculer la variance de  $\hat{\theta}$ .
3. Calculer le MSE (Mean Squared Error) l'erreur quadratique moyenne de  $\hat{\theta}$  lors de l'estimation de  $\theta$ .