$4^{ème}$ année Ingénieur SISC — Année universitaire 2021 – 2022

U.E : Codes Correcteurs d'Erreurs

Série de TD $n^0 2$

Ex-1- Codes à décodage unique, Condition de préfixe.

Soit une source S qui émet quatre symboles $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. On associe à chaque symbole $S_{i=1,\ldots,4}$ un code $C_{i=1,\ldots,4}$ comme indiqué sur le tableau suivant :

S_i	$p(S_i)$	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	0.55	0	0	0	0
S_2	0.25	0	1	10	01
S_3	0.13	1	01	110	011
S_4	0.07	11	10	111	0111

1. Lesquels parmi ces quatre codes satisfont la condition de préfixe ? Pourquoi ?
2. Lesquels parmi ces codes sont à décodage unique ? Pourquoi ?
3. Quel est le code le plus efficace parmi les quatre ? Pourquoi ?
4. Coder les symboles $S_{i=1,\ldots,4}$ selon la méthode de Huffman. Conclure.

Ex -2- : Débit d'information, Taux d'erreur résiduel.

On désire transmettre de l'information numérique sur une voie téléphonique de largeur de bande $4\,kHz$ et de rapport signal sur bruit $13\,dB$. Le débit binaire est fixé à $1,2\,kbit/s$ et le taux d'erreur nécessaire doit être $\epsilon < 10^{-4}$.

1. Calculer le débit d'information théorique de la voie de transmission.

Une solution élémentaire consiste à répéter les symboles émis trois fois ("0" $\mapsto$ "000", "1" $\mapsto$ "111". Le décodage à la récéption s'effectue par le critère de la logique majoritaire selon le tableau suivant :

Triplet reçu	000	001	010	100	011	101	110	111
é.b. décidé	0	0	0	0	1	1	1	1

2. Calculer le taux d'erreur résiduel par é.b. du message utile.

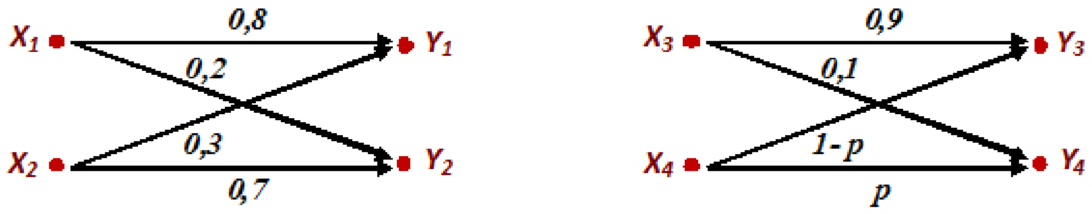
Ex -3- : Inégalité de Hamming, Distance de Hamming.

Quelle est la plus grande valeur de la distance de Hamming d_H du code $C(k = 2, n = 5)$? Donner un exemple de code.

Ex -4- : Information mutuelle, Capacité d'un canal.

On considère les deux canaux binaires représentés ci-dessous à deux entrées et deux sorties chacun.

1. Calculer la capacité C du premier canal si $P(X_1) = 0,55$.
2. Représenté les paramètres du canal équivalent aux deux canaux mis en cascade.
3. Déterminer la valeur de la probabilité p dans le cas où on veut que le canal équivalent obtenu soit symétrique.



Ex -5- : Probabilités et Entropies conditionnelles, Débit d'information.

À l'entrée d'un canal bruyant, des symboles $\{x_1, x_2, x_3\}$ d'une source X de probabilités respectives $0,6 - 0,3$ et $0,1$, sont émis avec un débit symbole $D_s = 10^3\, symb/s$. Le message reç Y est constitué de symboles $\{y_1, y_2, y_3\}$. Les symboles x_1 émis sont recus pour $3/5$ comme des symboles y_1, pour $1/5$ comme des symboles y_2 et $1/5$ comme des symboles y_3. Les symboles x_2 émis sont recus pour $2/3$ comme des symboles y_2, pour $1/3$ comme des symboles y_3. Le symbole x_3 émis est recu intégralement comme symbole y_3.

1. Donner le schéma du modèle statistique du canal en précisant les probabilités conditionnelles qui le caractérisent.
2. Calculer l'entropie $H(X)$ de la source.
3. Calculer les probabilités de présence des symboles $\{y_1, y_2, y_3\}$, puis en déduire $H(Y)$.
4. Calculer l'entropie conditionnelle $H(X/Y)$.
5. Calculer le débit d'information C du canal.

Ex -6- : Codage par parité paire et impaire, Capacité de détection.

On considère le code $C(k = 2, n = 3)$ obtenu par parité.

1. Montrer que le code $C(3, 2)$ obtenu par parité paire est linéaire.
2. Montrer que le code $C(3, 2)$ obtenu par parité impaire n'est pas linéaire.
3. Que peut-on dire de la capacité de détection dans chaque cas.