

U.E : Codes Correcteurs d'Erreurs

Série de TD n^{01}

Ex -1- : Canal affecté d'un bruit, Transmission sans erreur

Un signal analogique de largeur de bande $B = 4\text{kHz}$ est échantillonné à 1,25 fois la fréquence de Nyquist, chaque échantillon étant quantifié sur 256 niveaux équiprobables. On suppose que les échantillons sont statistiquement indépendants.

1. Quel est le débit d'information de la source ?
2. Peut-on transmettre sans erreur les signaux de cette source sur un canal AWGN de 10kHz de bande passante et présentant un rapport signal sur bruit de 20dB .
3. Calculer le rapport $\frac{S}{N}$ requis pour assurer une transmission sans erreur dans les conditions énoncées ci-haut.
4. Calculer la bande passante requise pour acheminer sans erreur les signaux de la source considérée sur un canal AWGN avec un rapport $\frac{S}{N} = 20\text{dB}$.

Ex -2- : Codage de Huffmann, Codage de Shannon-Fano, Redondance.

Une source S émet les symboles $\{A, B, C, D, E, F\}$ avec les probabilités respectives suivantes : $P(A) = 0,17$, $P(B) = 0,03$, $P(C) = 0,40$, $P(D) = 0,06$, $P(E) = 0,20$ et $P(F) = 0,14$.

1. Coder ces symboles en utilisant la méthode de Huffmann.
2. Coder ces symboles en utilisant la méthode de Shannon-Fano.
3. Quelle est la redondance dans chaque cas ?

Ex -3- : Codage de Huffmann, Codage de Shannon-Fano, Inégalité de Kraft.

Une source S émet les cinq symboles $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ avec les probabilités $P(S_1) = 1/3$, $P(S_2) = 1/4$, $P(S_3) = 1/6$, $P(S_4) = 1/6$, $P(S_5) = 1/12$.

1. Calculer l'entropie de la source S .
2. Coder ces symboles en utilisant la méthode de Huffmann.
3. Vérifier l'inégalité de Kraft.
4. Décoder le message 00101100001.

Ex -4- : Théorie d'information, Codage Huffman.

On désire transmettre un message écrit à l'aide d'un alphabet qui comprend 3 symboles $\{x_1, x_2, x_3\}$ de probabilités respectives $p(x_1) = 0,7$; $p(x_2) = 0,2$; $p(x_3) = 0,1$.

1. Calculer l'entropie moyenne par symbole.
2. Calculer la redondance.
3. On code les message de la manière suivante :

$$x_1 \mapsto 0 \quad x_2 \mapsto 10 \quad x_3 \mapsto 11$$

Quelle est l'entropie moyenne par élément binaire ?

On se propose maintenant de coder le message en considérant chacune des $3^2 = 9$ paires $\{x_i, x_j\}$ comme un symbole d'un alphabet de 9 éléments.

4. Calculer les probabilités de chacunes de ces paires.
4. Pour un codage de type Huffman, calculer l'entropie moyenne par élément binaire, puis comparer le résultat avec la question précédente.

Ex -5- : Quantité d'information, Redondance, Codage source.

Dans une transmission numérique un système utilise 9 niveaux de tensions, ces derniers ne sont pas équiprobables. Les niveaux faibles sont plus probables que les niveaux élevés. Ces niveaux sont notés n_0, n_1, \dots, n_8 . La statistique sur le signal conduit aux probabilités suivantes :

Niveaux	Probabilités
n_4	$p_4 = \frac{1}{3}$
n_5, n_6	$p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$
$n_0, n_1, n_2, n_3, n_7, n_8$	$p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = p_7 = p_8 = \frac{1}{18}$

1. Calculer l'entropie par niveau de cette source.
2. Quelle est la redondance de cette source ?
3. On code les niveaux à l'aide d'éléments binaires "0" et "1" et l'on supposera dans la suite de cette question que ces symboles "0" et "1" sont équiprobables. On choisit de coder chaque niveau avec un nombre identique d'éléments binaires.
 - 3-a. Quelle est le nombre minimum nécessaire ?
 - 3-b. Quelle est la redondance de ce codage ?
 - 3-c. Quelle est la quantité d'information moyenne transportée par un élément binaire ?
4. On choisit maintenant d'effectuer un codage selon la méthode de Huffmann.
 - 4-a. Donner la construction de Huffmann ?
 - 4-b. Quelle est la longueur moyenne en élément binaire des niveaux ?
 - 4-c. Quelle est la redondance de ce codage ?
 - 4-d. Quelle est la quantité d'information moyenne transportée par un élément binaire ?
5. Dans cette question on va coder les niveaux selon un la méthode de Shannnon-Fano.
 - 5-a. Donner la construction du codage selon cette méthode ?
 - 5-b. quelle est la longueur moyenne en élément binaire des niveaux ?
 - 5-c. Quelle est la redondance de ce codage ?
 - 5-d. Quelle est la quantité d'information moyenne transportée par un élément binaire ?